imię i nazwisko: .... nr indeksu: ....

1	2	$\sum$

2. BADANIE PARAMETRÓW SYGNAŁÓW LOSOWYCH

PRACA DOMOWA – 17 kwietnia 2019

Uwaga: Za pracę domową można uzyskać maksymalnie 1 punkt. Rozwiązania zadań (w formie ***papierowej*** lub ***pliku PDF ze skanem***) należy oddać (zostawić w przegródce pok. 417 na portierni lub przysłać mailem na adres `L.Blaszczyk@mini.pw.edu.pl`) najpóźniej o godzinie 7:59 w dniu zajęć. Warto zachować kopię rozwiązań, będzie niezbędna podczas zajęć.

Wstęp teoretyczny. *Sygnałem stochastycznym czasu dyskretnego* nazywamy proces losowy $\xi(n)$ określony w dyskretnych chwilach czasowych $n \in \mathbb{Z}$ (lub $n \in \mathbb{N}$). Sygnał ten opisuje łączny wielowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych $(\ldots, \xi(-1), \xi(0), \xi(1), \ldots, \xi(k), \ldots)$, jednak ze względów praktycznych dla scharakteryzowania tych sygnałów posługujemy się najczęściej ich momentami:

- *wartość średnia*: $\mu_\xi(n) = \mathbb{E}[\xi(n)]$,
- *funkcja autokorelacji*: $R_\xi(n_1, n_2) = \mathbb{E}[\xi(n_1)\xi^*(n_2)]$,
- *funkcja autokowariancji*: $C_\xi(n_1, n_2) = \mathbb{E}[(\xi(n_1) - \mu_\xi(n_1))(\xi(n_2) - \mu_\xi(n_2))^*]$,
- *wartość średniokwadratowa* (równa oczekiwanej mocy chwilowej): $P_\xi(n) = \mathbb{E}[|\xi(n)|^2]$,
- *wariancja*: $\sigma_\xi^2(n) = \mathbb{E}[|\xi(n) - \mu_\xi(n)|^2]$.

Jeśli $\psi(n)$ również jest sygnałem stochastycznym, to definiuje się także parametry wzajemne:

- *funkcja korelacji wzajemnej*: $R_{\xi\psi}(n_1, n_2) = \mathbb{E}[\xi(n_1)\psi^*(n_2)]$,
- *funkcja kowariancji wzajemnej*: $C_{\xi\psi}(n_1, n_2) = \mathbb{E}[(\xi(n_1) - \mu_\xi(n_1))(\psi(n_2) - \mu_\psi(n_2))^*]$.

Sygnały stochastyczne będziemy nazywali *ortogonalnymi*, jeśli $R_{\xi\psi}(n_1, n_2) = 0$ dla wszystkich n_1 i n_2, a także *nieskorelowanymi*, jeśli $C_{\xi\psi}(n_1, n_2) = 0$ dla wszystkich n_1 i n_2.

Sygnał stochastyczny czasu dyskretnego będziemy nazywać *stacjonarnym w szerszym sensie*, jeżeli jego wartość średnia jest stałą funkcją czasu ($\mu_\xi \equiv \text{const}$), funkcja autokorelacji zależy jedynie od różnicy $m = n_1 - n_2$, a wariancja jest skończona. Można zdefiniować wówczas jednowymiarową funkcję autokorelacji $R_\xi(m) = R_\xi(n, n-m)$ (nie zależy ona od n). Aby scharakteryzować sygnał stochastyczny w dziedzinie częstotliwości definiuje się *widmo mocy*: $S_\xi(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_\xi(m)e^{-im\theta}$ (czyli dyskretną transformatę Fouriera funkcji autokorelacji).

Przykładem stacjonarnego sygnału stochastycznego jest *szum biały* – jest to sygnał $w(n)$ o zerowej wartości średniej i skończonej wariancji, którego widmo mocy jest stałe w przedziale $\theta \in [0, 2\pi]$ i równe wariancji:

$$S_w(\theta) \equiv \sigma_w^2 \equiv \text{const}, \qquad R_w(m) = \sigma_w^2\delta(m).$$

Szum biały może być generowany jako ciąg liczb losowych o różnych rozkładach prawdopodobieństwa.

Zadanie 1. Niech $\xi(n)$ będzie sygnałem stacjonarnym (w szerszym sensie). Pokaż, że wówczas prawdziwe są następujące własności:

$$\sigma_\xi^2 \equiv \text{const}, \qquad R_\xi(0) > 0, \qquad R_\xi(0) \geqslant |R_\xi(m)| \text{ dla wszystkich } m, \qquad R_\xi(-m) = R_\xi^*(m).$$

Uwaga. Zmienne losowe $\xi(n)$ mogą być rzeczywiste lub zespolone.

Zadanie 2. Niech $\xi(n)$ będzie dyskretnym sygnałem harmonicznym o losowej fazie, tzn.

$$\xi(n) = A\sin(\theta_0 n + \varphi), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

gdzie A jest (nielosową) amplitudą, θ_0 to (nielosowa) pulsacja, a φ to losowa faza o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-\pi, \pi]$.

(1) Wykaż, że jest to sygnał stacjonarny.

(2) Wyznacz wartość średnią, funkcję autokorelacji i widmo gęstości mocy sygnału $\xi(n)$.

(3) Korzystając z wyprowadzonych wzorów wyznacz moc średnią tego sygnału.