imię i nazwisko: .... nr indeksu: ....

zad. 1	zad. 2	$\sum$

5. PODSTAWY CYFROWEGO PRZETWARZANIA OBRAZÓW

PRACA DOMOWA – 7 czerwca 2019

Uwaga: Za pracę domową można uzyskać maksymalnie 1 punkt. Rozwiązania zadań (w formie ***papierowej*** lub ***pliku PDF ze skanem***) należy oddać (zostawić w przegródce pok. 417 na portierni lub przysłać mailem na adres `L.Blaszczyk@mini.pw.edu.pl`) najpóźniej o godzinie 7:59 w dniu zajęć. Warto zachować kopię rozwiązań, będzie niezbędna podczas zajęć.

Wstęp teoretyczny. Wprowadźmy oznaczenie $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ i niech $\mathbf{x}\colon [M] \times [N] \to \mathbb{R}$ będzie sygnałem 2-wymiarowym (np. obrazem). 2-wymiarową **dyskretną transformatą Fouriera** sygnału $\mathbf{x}$ nazywamy funkcję $\mathbf{X}\colon [M] \times [N] \to \mathbb{C}$ daną wzorem

$$\mathbf{X}(k,\ell) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}(m,n) \exp\left\{-2\pi i \left(\frac{(m-1)(k-1)}{M} + \frac{(n-1)(\ell-1)}{N}\right)\right\}, \quad k \in [M],\ \ell \in [N].$$

Transformata odwrotna dana jest wzorem

$$\mathbf{x}(m,n) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{k=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{N} \mathbf{X}(k,\ell) \exp\left\{2\pi i \left(\frac{(m-1)(k-1)}{M} + \frac{(n-1)(\ell-1)}{N}\right)\right\}, \ m \in [M],\ n \in [N].$$

Zauważmy, że w praktyce oznacza to, że najpierw obliczana jest jedna transformata 1-wymiarowa (po kolumnach, dla każdego wiersza), a następnie kolejna transformata 1-wymiarowa (po wierszach, dla każdej kolumny). W MATLABie realizowane jest to automatycznie za pomocą funkcji `fft2` (jej użycie jest równoważne poleceniu `fft(fft(X).').'`). Skutkuje to m.in. tym, że większość klasycznych własności DFT w prosty sposób uogólnia się na większą liczbę wymiarów.

Zadanie 1. Niech $N = N_1 \cdot N_2$, gdzie $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+$. Ponadto, niech $\mathbf{x}\colon [N] \to \mathbb{R}$ będzie sygnałem dyskretnym takim, że

$$\mathbf{x}(n) = 0 \qquad \text{dla } n > N_1$$

i oznaczmy przez $\mathbf{X}$ dyskretną transformatę Fouriera[1] sygnału $\mathbf{x}$. Dodatkowo, niech $\mathbf{y}\colon [N] \to \mathbb{R}$ będzie okresowym powieleniem sygnału $\mathbf{x}$, tzn.

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{i=0}^{N_2-1} \mathbf{x}(n - i \cdot N_1), \qquad n \in [N],$$

gdzie jeśli $(n - i \cdot N_1) \notin [N]$, to przyjmujemy $\mathbf{y}(n) = 0$. Wykaż, że jeśli $\mathbf{Y}$ jest dyskretną transformatą Fouriera sygnału $\mathbf{y}$, to zachodzi

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{cases} N_2 \cdot \mathbf{X}(k), & \text{jeśli } (k \mod N_2) = 1, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

[1] Przyjmujemy definicję DFT zgodną z implementacją w MATLABie, tzn. $\mathbf{X}(k) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}(n) \exp\left\{-2\pi i \frac{(n-1)(k-1)}{N}\right\}$.

Zadanie 2. Niech $M = M_1 \cdot M_2$, gdzie $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$ i $N = N_1 \cdot N_2$, gdzie $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+$. Niech $\mathbf{x}\colon [M] \times [N] \to \mathbb{R}$ będzie 2-wymiarowym sygnałem dyskretnym takim, że

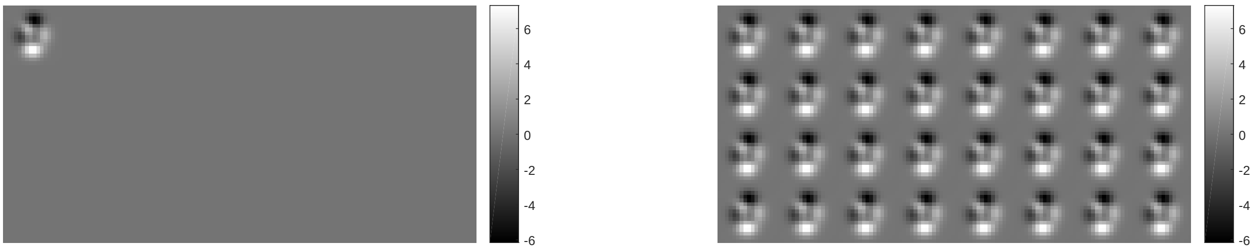
$$\mathbf{x}(m,n) = 0 \qquad \text{dla } m > M_1 \text{ lub } n > N_1$$

i niech $\mathbf{X}$ będzie dyskretną 2-wymiarową transformatą Fouriera sygnału $\mathbf{x}$. Ponadto, niech $\mathbf{y}\colon [M] \times [N] \to \mathbb{R}$ będzie okresowym powieleniem sygnału $\mathbf{x}$, tzn.

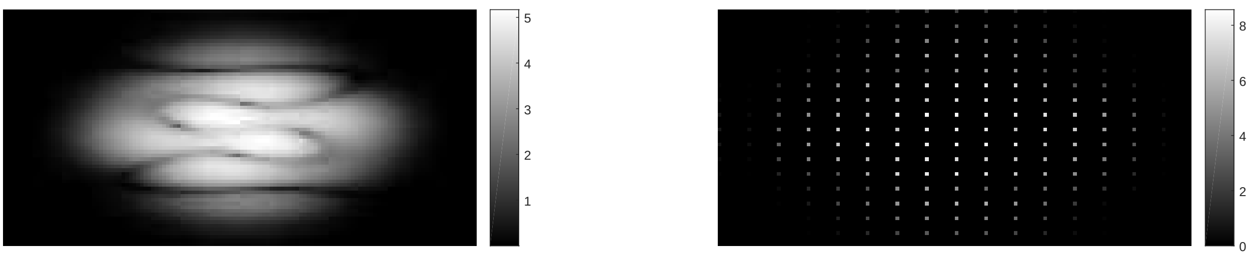
$$\mathbf{y}(m,n) = \sum_{i=0}^{M_2-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \mathbf{x}(m - i \cdot M_1, n - j \cdot N_1), \qquad m \in [M],\ n \in [N],$$

gdzie jeśli $(m - i \cdot M_1) \notin [M]$ lub $(n - j \cdot N_1) \notin [N]$, to przyjmujemy $\mathbf{y}(m,n) = 0$. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania wykaż, że jeśli $\mathbf{Y}$ jest dyskretną 2-wymiarową transformatą Fouriera sygnału $\mathbf{y}$, to zachodzi

$$\mathbf{Y}(k,\ell) = \begin{cases} M_2 \cdot N_2 \cdot \mathbf{X}(k,\ell), & \text{jeśli } (k \mod M_2) = 1 \text{ oraz } (\ell \mod N_2) = 1, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$



Rysunek 1: Przykładowe sygnały $\mathbf{x}$ (z lewej) i $\mathbf{y}$ (z prawej) dla $M_1 = N_1 = 16$, $M_2 = 4$, $N_2 = 8$.



Rysunek 2: Funkcje $\log_2(1 + |\mathbf{X}|)$ (z lewej) i $\log_2(1 + |\mathbf{Y}|)$ (z prawej) odpowiadające sygnałom z Rys. 1.