# Podstawy matematyki stosowanej

## czyli wstęp do równań różniczkowych

## ĆWICZENIA

dr inż. Łukasz Błaszczyk

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

rok akademicki 2019/2020 (semestr letni)

## Zadanie 1.

Sprawdź, że podana funkcja $x = x(t)$ jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego:

- a) $x + \sqrt{1+x^2} = t$; $tx' = \sqrt{1+x^2}$;
- b) $\mathrm{e}^x = 2tx\mathrm{e}^t$; $x't(x-1) = (1+t)x$;
- c) $\mathrm{tg}(x/2) = \mathrm{e}^{t^2}$; $x' = 2t\sin x$;
- d) $x\sin x + \cos x - t\cos t + \sin t = 1$; $xx'\cos x = -t\sin t$.

## Zadanie 2.

Znajdź równanie różniczkowe (możliwie niskiego rzędu), którego rozwiązaniem jest zadana rodzina funkcji:

a) $x = \mathrm{e}^{Ct}$, $C \in \mathbb{R}$;

b) $t^2 + Cx^2 = 2x$, $C \in \mathbb{R}$;

c) $(t - C_1)^2 + C_2 x^2 = 1$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

## Zadanie 3.

Wyznacz rozwiązanie równania spełniające podany warunek początkowy:

a) $x' = \frac{t-1}{x}$, $x(1) = \sqrt{2}$;

b) $x' = \frac{x\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$, $x(0) = 2$.

## Zadanie 4.

Wyznacz rozwiązanie równania spełniające podany warunek początkowy:

a) $x' = \frac{x}{t+\sqrt{tx}}$, $x(4) = 1$;

b) $x' = \frac{x\ln x}{\sin t}$, $x(\pi/2) = \mathrm{e}$.

## Zadanie 5.

Oblicz

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2-9/t^2}\,\mathrm{d}t.$$

*Wskazówka.* Można skorzystać z faktu: $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2.$

## Zadanie 6.

Znajdź całkę ogólną równania różniczkowego:

a) $x' = \frac{x}{t} + \operatorname{tg} \frac{x}{t}$;

b) $x' = \frac{t-x+1}{t-x}$;

c) $tx' = x + \sqrt{x^2 - t^2}$.

## Zadanie 7.

Stosując metodę uzmiennienia stałej znajdź całkę ogólną równania różniczkowego:

a) $x' = \frac{t^3+x}{t}$;

b) $x' - x \operatorname{ctg} t = 2t \sin t$;

c) $x' = \frac{1}{t \sin x + 2 \sin 2x}$.

## Zadanie 8.

Stosując metodę przewidywań znajdź całkę szczególną równania spełniającą podany warunek początkowy:

a) $x' - 2x = -t^2$, $x(0) = 1/4$;

b) $x' = a\sin t + bx$, $x(0) = 1$.

## Zadanie 9.

Znajdź całkę ogólną równania różniczkowego:

a) $x' = \frac{2tx}{3t^2 - x^2}$;
b) $tx' = \frac{x^2}{t} + x$;
c) $(t + x)x' = x$;
d) $tx' = t\cos\frac{x}{t} + x$.

## Zadanie 10.

Stosując metodę uzmiennienia stałej znajdź całkę ogólną równania różniczkowego:

a) $x' + 2x = 5\cos t;$

b) $x' - \frac{3}{t}x = 2t^2;$

c) $x' + \frac{1}{\cos t}x = \cos t;$

d) $x' + \frac{1}{t-2}x = 3t.$

## Zadanie 11.

Stosując metodę przewidywań znajdź całkę szczególną równania spełniającą podany warunek początkowy:

a) $x' + x = \cos t$, $x(0) = 1/2$;

b) $x' - 2x = \mathrm{e}^t - t$, $x(1) = 0$;

c) $x' - bx = \mathrm{e}^{at}$, $x(0) = \frac{1}{a}$, gdzie $a \neq 0$;

d) $x' - 2x = 6(\cos(2t) - \sin(2t))\mathrm{e}^{4t}$, $x(0) = 3$.

## Zadanie 12.

Znajdź całkę ogólną równania

$$x^{(4)} + x''' - 2x'' = t,$$

znając cztery całki szczególne równania $x^{(4)} + x''' - 2x'' = 0$:

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = \mathrm{e}^t, \quad x_4(t) = \mathrm{e}^{-2t}.$$

## Zadanie 13.

Znajdź całkę ogólną równania jednorodnego

$$x''' - \frac{3}{t}x'' + \frac{6}{t^2}x' - \frac{6}{t^3}x = 0,$$

znając jedną całkę szczególną:

$$x_1(t) = t.$$

## Zadanie 14.

Znajdź całkę ogólną równania jednorodnego

$$x^{(5)} + 4x^{(4)} + 2x''' - 20x'' + 13x' = 0.$$

## Zadanie 15.

Znajdź całkę ogólną równania niejednorodnego

$$x'' + 16x = 8\cos\omega t$$

w zależności od wartości $\omega$.

## Zadanie 16.

Przedyskutuj istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia

$$x' = \frac{\sqrt{t^2 + 4x} - t}{2}, \qquad x(2) = -1.$$

## Zadanie 17.

Znajdź całkę ogólną równania

$$x''' + x'' = 1,$$

znając trzy całki szczególne równania $x''' + x'' = 0$:

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = \mathrm{e}^{-t},$$

## Zadanie 18.

Znajdź całkę ogólną równania jednorodnego

$$t^2x'' - tx' + x = 0,$$

znając jedną całkę szczególną:

$$x_1(t) = t.$$

## Zadanie 19.

Przedyskutuj istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia

a) $x' = -x^2$, $x(0) = -1$;
b) $x' = t\,|x|$, $x(1) = 0$;
c) $x' = x^{1/3} + t$, $x(1) = 0$;
d) $x' = \frac{2x}{t}$, $x(t_0) = x_0$.

## Zadanie 16 (jeszcze raz).

Przedyskutuj istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia

$$x' = \frac{\sqrt{t^2 + 4x} - t}{2}, \qquad x(2) = -1.$$

## Zadanie 20.

Znajdź całkę ogólną układu równań

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

## Zadanie 21.

Dany jest model *drapieżnik–ofiara*:

$$x' = ax - bxy, \qquad y' = -cy + dxy,$$

gdzie $a, b, c, d \geqslant 0$ są danymi parametrami. Znajdź punkty krytyczne i zbadaj ich stabilność.

## Zadanie 22.

Znajdź całkę ogólną układu równań

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

gdzie

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

## Zadanie 23.

Wiemy, że całka ogólna układu równań

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

ma postać $\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^m$. Wiemy również, że rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

jest funkcja $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0$.
Jak, mając układ fundamentalny $\mathbf{U}(t)$, wyznaczyć macierz $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$?

## Zadanie 24.

Wyznacz macierz $e^{\mathbf{A}t}$ dla macierzy $\mathbf{A}$ z Zadania 22, tzn.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

## Zadanie 25.

Dany jest model *konkurencji gatunków*:

$$x' = ax - bxy, \qquad y' = ky - dxy,$$

gdzie $a, b, d, k \geqslant 0$ są danymi parametrami. Znajdź punkty krytyczne i zbadaj ich stabilność.

## Zadanie 26.

Rozwiń w trygonometryczny szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{dla } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

## Zadanie 27.

Rozwiń w trygonometryczny szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \sin \alpha x, \qquad -\pi < x < \pi,$$

gdzie $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

## Zadanie 28.

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 \leqslant x < \alpha \text{ lub } \pi - \alpha < x \leqslant \pi, \\ 1, & \text{dla } \alpha < x < \pi - \alpha, \end{cases}$$

gdzie $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

## Zadanie 29.

Rozwiń w wykładniczy szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = x, \qquad -1 < x < 1.$$

## Zadanie 30.

Rozwiń w trygonometryczny szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \sin^2 x - \cos 3x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Następnie podaj wartości całek

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos 8x \,\mathrm{d}x, \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 8x \,\mathrm{d}x.$$

## Zadanie 31.

Rozwiń w trygonometryczny szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dla } |x| \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } \frac{\pi}{3} < |x| \leqslant \pi. \end{cases}$$

## Zadanie 32.

Rozwiń funkcję

$$f(x) = 1 - x, \qquad 0 < x < 1,$$

w szereg Fouriera sinusów i w szereg Fouriera cosinusów.

## Zadanie 33.

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\alpha}, & \text{dla } 0\leqslant x<\alpha,\\ 1, & \text{dla } \alpha\leqslant x<\pi-\alpha,\\ \frac{\pi-x}{\alpha}, & \text{dla } \pi-\alpha\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$$

gdzie $\alpha\in(0,\pi)$.

## Zadanie 34.

Rozwiń w wykładniczy szereg Fouriera funkcję

a) $f(x) = |x|, \qquad -\pi < x < \pi;$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } -\pi < x < \alpha \text{ lub } \beta < x < \pi, \\ 1, & \text{dla } \alpha < x < \beta, \end{cases}$

gdzie $-\pi < \alpha < \beta < \pi$.

Oznaczenie:

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{dla } t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } t = 0, \\ 0, & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

## Zadanie 35.

Wyznacz widmo amplitudowe i fazowe funkcji

$$f(t) = t \cdot (\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t+1)).$$

## Zadanie 36.

Wykaż, że jeżeli funkcje $f$, $g$, gdzie $g(t) = -\mathbf{i}tf(t)$, są całkowalne, to

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}'(\omega).$$

## Zadanie 37.

Wykaż, że transformata Fouriera funkcji

$$f(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

jest równa

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right).$$

## Zadanie 38.

Wyznacz widmo amplitudowe i fazowe funkcji

$$f(t) = (|t| - 2) \cdot (\mathbb{1}(t-2) - \mathbb{1}(t+2)).$$

## Zadanie 39.

Udowodnij następujące własności transformaty Fouriera:

1. przesunięcie czasowe,
2. przesunięcie częstotliwościowe,
3. skalowanie.

Następnie, korzystając z własności 2, udowodnij własność modulacji.

## Zadanie 40.

Wykaż, że jeżeli $g(t) = \overline{f(t)}$, to

$$\hat{g}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)},$$

gdzie $\overline{z}$ oznacza liczbę sprzężoną do $z$. Wyciągnij z tego wniosek, że jeżeli funkcja $f$ ma wartości rzeczywiste, to

$$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}.$$

## Zadanie 41.

Udowodnij, że dla funkcji $f$ i $g$ bezwzględnie całkowalnych zachodzi tzw. **równość Parsevala**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) \,\mathrm{d}x.$$

Następnie pokaż, że dla funkcji $f$ całkowalnych z kwadratem zachodzi tzw. **równość Plancherela**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \,\mathrm{d}\omega.$$

## Zadanie 42.

Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**Splotem** funkcji $f$ i $g$ nazywamy funkcję

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Splot jest dobrze określony dla funkcji $f$ i $g$ bezwzględnie całkowalnych i dla takich funkcji jest też bezwzględnie całkowalny.

### Zadanie 43.

Udowodnij, że dla funkcji $f$ i $g$ bezwzględnie całkowalnych zachodzi

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).$$

## Zadanie 44.

Niech

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad |t| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla} \quad |t| = 1, \\ 0, & \text{dla} \quad |t| > 1. \end{cases}$$

Oblicz splot $h * h$, a następnie oblicz transformatę Fouriera funkcji

$$f(t) = (|t| - 2) \cdot (\mathbb{1}(t-2) - \mathbb{1}(t+2))$$

(czyli powtórz Zadanie 38 korzystając z twierdzenia z Zadania 43).

## Zadanie 45.

Wyznacz transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}, \qquad \alpha > 0,$$

a następnie oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{(1+\omega^2)^2}.$$

## Zadanie 46.

Oblicz splot funkcji $f$ i $g$, gdzie

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t} \cdot \mathbb{1}(t), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cdot \mathbb{1}(t),$$

dwiema metodami:

a) bezpośrednio z definicji,

b) korzystając z twierdzenia z Zadania 43.