

# Lista tematów projektowych

Projekty 1-6 dotyczą **równań różniczkowych zwyczajnych**, a projekty 7-10 **przekształceń całkowych**. Istotną częścią oceny każdego z tematów będzie zaprezentowanie zastosowania omawianego problemu i atrakcyjne przedstawienie wyników.

Większość z poniższych tematów była inspirowana tekstem, którego dane są podane pod opisem. Tekst ten może stanowić punkt wyjścia do realizacji projektu, jednak nie należy się tylko do niego ograniczać (bardzo często podane są w nim dane bibliograficzne do kolejnych tytułów). Niektóre tematy wymagają już od początku samodzielnych poszukiwań.

---

## 1. Inwazja zombie – modele epidemiologiczne

Równania różniczkowe zwyczajne pojawiają się w zastosowaniach epidemiologicznych do modelowania dynamiki populacji (np. przy rozprzestrzenianiu się pewnej choroby). Projekt polega na zbudowaniu i przeanalizowaniu modelu, który opisuje wzajemne zależności między odsetkiem ludzi, zombie i „martwych” zombie w populacji, które mogą wciąż powrócić do populacji jako „zwykłe” zombie.

### Źródła:

- (1) D. F. Griffiths, D. J. Higham, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Initial Value Problems*, Springer 2010.
  - (2) P. Munz, I. Hudea, J. Imad, and R. J. Smith?, *When zombies attack!: Mathematical modelling of an outbreak of zombie infection*. In J. Tchuenche and C. Chiyaka, editors, *Infectious Disease Modelling Research Progress*, pp. 133–150, Nova, 2009.
- 

## 2. Epidemia na grafach

Zagadnienie epidemii można modelować na wiele różnych sposobów – jednym z podstawowych modeli różniczkowych jest tzw. model SIR. Można do tego problemu podejść jednak także w inny sposób – wykorzystując grafy. Buduje się wówczas graf (skierowany), którego wierzchołki reprezentują poszczególnych członków populacji, a krawędzie oznaczają relacje między nimi. Znane parametry modelu różniczkowego łatwo przenosi się wówczas na prawdopodobieństwo zakażenia wzdłuż krawędzi, czy też wyzdrowienia danego wierzchołka. Celem projektu jest stworzenie symulacji grafowej dla wybranych (różnych) parametrów modelu SIR oraz porównanie jej z rozwiązaniami modelu różniczkowego.

### Źródło:

- (1) M. J. Keeling, K. T. D. Eames, *Networks and epidemic models*, *J. R. Soc. Interface*, vol. 2, pp. 295–307, 2005.
- 

## 3. Czy można spaść do czarnej dziury?

Celem projektu jest zbadanie pewnego paradoksu – wyobraźmy sobie, że przebywamy na stacji kosmicznej, która porusza się po orbicie wokół czarnej dziury. W pewnym momencie nasz kolega astronauta wyskakuje ze stacji w kierunku czarnej dziury. Z jego punktu widzenia, będzie przyciągany przez czarną dziurę i w pewnym momencie przekroczy tzw. *horyzont zdarzeń*. Jednak z punktu widzenia obserwatora na stacji astronauta będzie się poruszał coraz wolniej i nigdy nie przekroczy horyzontu zdarzeń. Jak to możliwe?

### Źródła: strony internetowe:

- (1) <https://www.markushanke.net/schwarzschild-spacetime-and-black-holes/>,
- (2) <https://www.colorado.edu/amath/sites/default/files/attached-files/black-hole-project.pdf>,
- (3) <https://physics.stackexchange.com/questions/21319/how-can-anything-ever-fall-into-a-black-hole-as-seen-from-an-outside-observer>

#### 4. Rebelia – czy można przewidzieć losy powstania przeciwko władzy?

Historia zna przypadki, gdy państwa upadały pod wpływem akcji sił zbrojnych. Zdarzało się też, że mieszkańcy takiego kraju nieprzychylnie reagowali na militarną okupację i organizowali ruchy powstańcze przeciwko okupantowi. Celem projektu jest zbadanie modelu opisującego zmiany liczby okupantów i powstańców oraz próba przewidzenia losów takich inicjatyw. Model jest oparty na znanych modelach ewolucyjnych/epidemiologicznych.

**Źródło:**

- (1) strona internetowa: <http://www.idea.wsu.edu/Insurgency/>
- 

#### 5. Sieci Hopfielda – równania różniczkowe vs sieci neuronowe

Do zagadnienia sieci neuronowych można podejść również od strony równań różniczkowych zwyczajnych. Celem tego projektu jest zapoznanie się z tzw. sieciami Hopfielda, wykorzystywanymi przede wszystkim jako model pamięci asocjacyjnej (sieć przechowuje wzorce). Należy przeanalizować proste modele ciągłych sieci Hopfielda (z punktu widzenia ich stabilności), a także zaprezentować możliwe zastosowania (sieci w wersji ciągłej lub dyskretnej).

**Źródło:**

- (1) S. Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Mathematica®*, Birkhäuser 2007.
- 

#### 6. Modele różniczkowe i dane – problem dopasowania

Równania różniczkowe zwyczajne modelują wiele procesów fizycznych, chemicznych, czy biologicznych. Problemem może być jednak dobór odpowiednich parametrów tych równań, tak by znany model dobrze obrazował zarejestrowane zjawisko. Celem projektu jest opisanie wybranej metody dopasowania parametrów równania różniczkowego do dostępnych (krótkookresowych) danych, a także implementacja takiej metody i zaprezentowania zastosowań.

**Źródło:**

- (1) D. Brewer et al., *Fitting ordinary differential equations to short time course data*, Phil. Trans. R. Soc. A, vol. 366, pp. 519–544, 2008.
- 

#### 7. Zobacz kotku co mam w środku, czyli jak działa tomografia komputerowa

Transformacja Fouriera jest jednym z podstawowych narzędzi nie tylko analizy i przetwarzania obrazów medycznych, ale także ich rejestrowania. Dane rejestrowane w tomografii komputerowej powstają na skutek prześwietlenia ciała promieniowaniem rentgenowskim pod wieloma różnymi kątami – z matematycznego punktu widzenia jest to całkowanie pewnej funkcji (dwóch zmiennych) pod różnymi kątami. Aby zrekonstruować obraz wnętrza organizmu potrzebny jest specjalny algorytm. Celem projektu jest opisanie i zaimplementowanie jednej z takich metod, tzn. algorytmu filtrowanej projekcji wstecznej. Działanie takiego algorytmu należy przetestować na tzw. fantomie Sheppa-Logana.

**Źródło:**

- (1) T. Olson, *Applied Fourier Analysis: From Signal Processing to Medical Imaging*, Birkhäuser 2017.

## 8. Brzmieć jak Alvin (i Wiewiórki)

Narzędzia fourierowskie znalazły wiele zastosowań także w przetwarzaniu dźwięków – można je wykorzystać np. do stworzenia modulatora głosu, który będzie modyfikował różne parametry wydawanych dźwięków, a efektem będzie całkowita zmiana jego brzmienia. Celem projektu jest opisanie i stworzenie modulatora głosu, który wykorzystuje przekształcenie Fouriera. Mile widziane (choć nieobowiązkowe) jest stworzenie modulatora działającego w czasie rzeczywistym i zaprezentowanie jego możliwości.

**Źródło:** strona internetowa:

- (1) <http://blogs.zynaptiq.com/bernsee/pitch-shifting-using-the-ft/>
- 

## 9. Co zrobić, gdy mamy za mało danych?

Wiemy już, że próbując sygnał (funkcję) z odpowiednią częstotliwością jesteśmy w stanie zrekonstruować go z pełną dokładnością. Wiemy też, że mając dostęp do pełnego wektora współczynników dyskretnej transformaty Fouriera możemy odtworzyć pierwotny sygnał za pomocą prostego algorytmu transformaty odwrotnej. Co jednak zrobić w przypadku, gdy nie mamy wystarczająco dużo informacji (bo ich uzyskanie jest czasochłonne, kosztowne, itp.)? Jedną z propozycji jest zastosowanie metod oszczędnego próbkowania (ang. *compressed sensing*), które przy pewnych dodatkowych założeniach wykorzystują algorytmu optymalizacyjne do rekonstrukcji. Celem projektu jest zapoznanie się z podstawowym algorytmem wykorzystującym transformatę Fouriera i zaimplementowanie go do rekonstrukcji obrazów.

**Źródło:** strona internetowa:

- (1) <http://people.eecs.berkeley.edu/~mlustig/CS.html>
- 

## 10. Nie tylko Fourier – transformaty falkowe

Przekształcenia całkowe, to nie tylko transformacja Fouriera. Jest to także cała paleta innych przekształceń, w których jądrem przekształcenia nie jest funkcja  $k(t, \omega) = e^{-it\omega}$ , ale inne funkcje, o zupełnie innych własnościach. Powstają wówczas tzw. transformacje falkowe, które znalazły zastosowanie m.in. w metodach kompresji danych. Celem projektu jest zapoznanie się z podstawami przekształceń falkowych, implementacja wybranego przekształcenia, a także próba zastosowania go do analizy obrazów.

**Źródło:** strona internetowa:

- (1) <http://disp.ee.ntu.edu.tw/tutorial/WaveletTutorial.pdf>
-