

Podstawy matematyki stosowanej
czyli wstęp do równań różniczkowych
część 1: Równania różniczkowe zwyczajne

dr inż. Łukasz Błaszczyk

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska

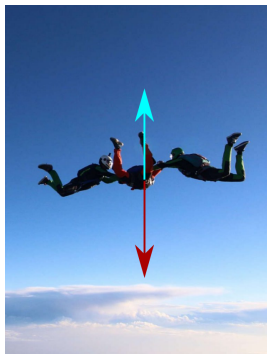
rok akademicki 2019/2020 (semestr letni)

Kilka prostych przykładów

Przykład 1 (Model spadającego obiektu).

Wyobraźmy sobie obiekt, który spada pod wpływem grawitacji w jakimś ośrodku (np. w powietrzu, w wodzie, w oleju, itp.) – chcemy przeanalizować jego ruch.

Niech $v(t)$ będzie jego prędkością w czasie t . Grawitacja ciągnie obiekt w dół, a opór ośrodka spowalnia jego ruch. Eksperyment pokazuje, że siła oporu jest proporcjonalna do kwadratu szybkości.



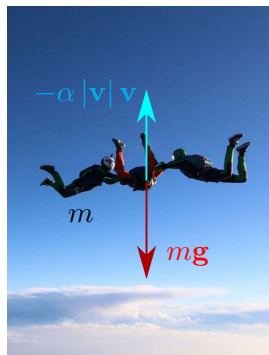
Kilka prostych przykładów

Przykład 1 (Model spadającego obiektu).

Wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:

- m – masa obiektu,
- g – przyspieszenie grawitacyjne,
- α – stała proporcjonalności oporu.

Przyjmijmy układ współrzędnych, w którym ruch w dół jest ruchem w kierunku dodatnim. Zakładamy, że początkowa prędkość jest zerowa – obiekt został upuszczony, a nie wyrzucony).



Kilka prostych przykładów

Przykład 1 (Model spadającego obiektu).

Wówczas, z praw dynamiki Newtona:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - \alpha |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Otrzymaliśmy równanie, w którym niewiadomą jest funkcja prędkości – równanie różniczkowe.

Metodami badania tego typu równań zajmiemy się za chwilę.

Kilka prostych przykładów

Przykład 2 (Problem pościgu).

Przyjrzyjmy się zagadnieniu, w którym należy wyznaczyć trajektorię obiektu, który próbuje przechwycić inny poruszający się obiekt, np.

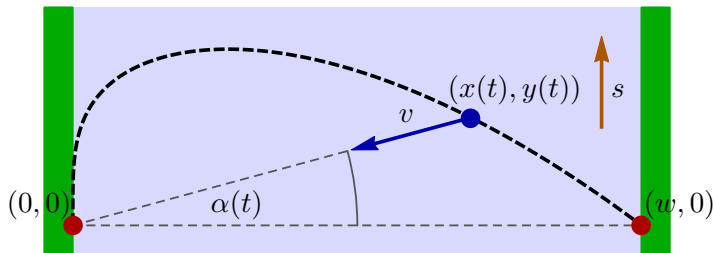
- rakiety wystrzelonej w samolot,
- statku, który chce zadokować w stacji kosmicznej.



Kilka prostych przykładów

Przykład 2 (Problem pościgu).

Spróbujemy zbadać następujący problem: człowiek skacze do kanału i płynie w kierunku ustalonego punktu po przeciwnej stronie kanału.



Kilka prostych przykładów

Przykład 2 (Problem pościgu).

Przyjmijmy następujące założenia:

- człowiek płynie ze stałą szybkością v i jest zawsze skierowany w stronę celu,
- woda porusza się ze stałą szybkością s ,
- kanał ma szerokość w ,
- punkt startowy ma współrzędne $(w, 0)$, a cel znajduje się w początku układu współrzędnych.

Poszukujemy trajektorii $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Kilka prostych przykładów

Przykład 2 (Problem pościgu).

Zauważmy, że składowe prędkości człowieka możemy zapisać jako

$$x'(t) = -v \cos \alpha(t), \quad y'(t) = s - v \sin \alpha(t),$$

gdzie α jest kątem między osią $0x$, a promieniem wodzącym poruszającego się człowieka.

Spróbujmy zapisać trajektorię jako funkcję $x \mapsto y(x)$ (tzn. niezależną od czasu). Zauważmy, że wówczas

$$y(t) = y(x(t)) \quad \Rightarrow \quad y'(t) = \frac{dy}{dx}(x(t)) \cdot x'(t).$$

Kilka prostych przykładów

Przykład 2 (Problem pościgu).

Stąd

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{s - v \sin \alpha(t)}{-v \cos \alpha(t)} = \operatorname{tg} \alpha(t) - \frac{s}{v} \cdot \frac{1}{\cos \alpha(t)}.$$

Zauważmy jednak, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, a zatem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{s}{v} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} - \frac{s}{v} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Kilka prostych przykładów

Przykład 2 (Problem pościgu).

Otrzymaliśmy wobec tego równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{s}{v} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

w którym znów niewiadomą jest funkcja – równanie różniczkowe.
Mamy także warunek początkowy – $y(w) = 0$.

Kilka prostych przykładów

Przykład 3 (Rozwijany łańcuch).

Wyobraźmy sobie jeszcze jeden problem, również mechaniczny. Na skraju półki leży L -metrowy łańcuch, którego każdy metr waży ρ . Łańcuch jest niemal zwinięty, jedynie ℓ -metrowy kawałek zwisa swobodnie z półki.

Nagle łańcuch zaczyna się rozwijać, a nas interesuje prędkość z jaką ostatni kawałek łańcucha opuści półkę.

Kilka prostych przykładów

Przykład 3 (Rozwijany łańcuch).

Długość kawałka łańcucha poza półką i znajdującego się akurat w ruchu zmienia się w czasie – oznaczmy przez $x(t)$ tę długość w czasie t , a przez $m(t)$ masę tego kawałka.

Wówczas, z drugiej zasady dynamiki Newtona dostaniemy

$$F = \frac{d}{dt}(m(t) \cdot v(t)) = m(t) \cdot v'(t) + m'(t) \cdot v(t),$$

gdzie F jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na łańcuch – w naszym przypadku $F = m(t) \cdot g$.

Kilka prostych przykładów

Przykład 3 (Rozwijany łańcuch).

Zauważmy, że

$$m(t) = \rho \cdot x(t) \quad \Rightarrow \quad m'(t) = \rho \cdot x'(t) = \rho \cdot v(t).$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, bardziej nas będzie interesowała zależność poszukiwanej funkcji od położenia, a nie od czasu, tzn. $v(x)$. Wówczas

$$v'(t) = \frac{d}{dt}v(x(t)) = \frac{dv}{dx}(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{dv}{dx}(x(t)) \cdot v(x(t)).$$

Kilka prostych przykładów

Przykład 3 (Rozwijany łańcuch).

Wstawiając te zależności do wyjściowego równania otrzymamy

$$\begin{aligned}
 m(t) \cdot v'(t) + m'(t) \cdot v(t) &= m(t) \cdot g \\
 \Leftrightarrow \rho x \cdot v \frac{dv}{dx} + \rho v \cdot v &= \rho x \cdot g \\
 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} - \frac{g}{v} &= 0.
 \end{aligned}$$

Wiemy dodatkowo (z warunków problemu), że $v(\ell) = 0$.

W dalszej części pokażemy jak to zagadnienie rozwiązać.

Nie tylko proste przykłady

Przykład 4, 5,

Równania różniczkowe można znaleźć nie tylko w prostych przykładach z fizyki:

- modele epidemiologiczne i populacyjne,
- modele kardiologiczne: nasycenie krwi/mięśni tlenem,
- modele neurologiczne: rozchodzenie się sygnałów nerwowych,
- modele dynamiki płynów (cieczy/gazów),
- zagadnienia optymalizacyjne,
- ...

Ogólne definicje

Definicja 1.

Równaniem różniczkowym zwyczajnym (ang. *ordinary differential equation*) nazywamy równanie

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = 0,$$

w którym niewiadomą jest funkcja $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ zmiennej t , i w którym występuje pochodna tej funkcji.

Dlaczego *zwyczajne*? Dla odróżnienia od równań różniczkowych *cząstkowych*.

Ogólne definicje

Definicja 2.

Równaniem różniczkowym cząstkowym (ang. *partial differential equation*) nazywamy równanie

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \right) = 0,$$

w którym niewiadomą jest funkcja $(x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$ dwóch lub większej liczby zmiennych, i w którym występuje pochodna cząstkowa tej funkcji.

Będziemy zajmować się wyłącznie równaniami zwyczajnymi.

Klasyfikacja równań różniczkowych

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = 0,$$

Definicja 3.

Liczbę $n \in \mathbb{N}$ nazywamy **rzędem równania różniczkowego**, jeżeli występuje w tym równaniu pochodna rzędu n funkcji niewiadomej, a nie występuje pochodna rzędu wyższego niż n .

Równania pierwszego, drugiego i czwartego rzędu:

$$x' = x + t, \quad x'' = 1 + x^2, \quad t^2 x'' = x^{(4)}.$$

Klasyfikacja równań różniczkowych

Uwaga.

Najczęściej będziemy mieli zajmowali się równaniami w postaci

$$\frac{d^n \mathbf{x}}{dt^n} = \mathbf{f} \left(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(n-1)} \right).$$

Równanie n -tego rzędu w tej postaci można wówczas łatwo sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}'(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(n-2)}(t) \\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}''(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \\ \mathbf{f} \left(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(n-1)} \right) \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie równania różniczkowego

Definicja 4.

Całką szczególną (rozwiązaniem, rozwiązaniem szczególnym) równania różniczkowego

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = 0$$

na przedziale $I = (a, b)$ nazywamy każdą funkcję $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, która spełnia to równanie w każdym punkcie przedziału I .

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = 0,$$

Uwaga (notacja).

Poszukiwane rozwiązania $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ mogą być

- skalarne: $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wówczas będziemy pisać

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0,$$

- wektorowe: $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, wówczas będziemy mieli do czynienia z układami równań.

Rozwiązanie równania różniczkowego

Przykład 6.

Zauważmy, że funkcja $x(t) = \cos(2t)$ jest rozwiązaniem równania

$$x''(t) + 4x(t) = 0$$

w całym \mathbb{R} . Podobnie funkcja $x(t) = \sin(2t)$. Można pokazać, że każda funkcja

$$x(t) = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

jest rozwiązaniem szczególnym powyższego równania.

Warunki początkowe

Definicja 5.

Zagadnieniem Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu n nazywamy następujące zagadnienie:

znaleźć rozwiązanie szczególne danego równania, które spełnia warunki początkowe

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}'(t_0) = \mathbf{x}_1, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{x}_{n-1},$$

gdzie liczby $t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ są dane.

Warunki początkowe

Przykład 6 (ciąg dalszy).

Chcąc ze zbioru rozwiązań

$$x(t) = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

równania $x''(t) + 4x(t) = 0$ wyznaczyć całkę szczególną spełniającą warunki $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ musimy rozwiązać układ dwóch równań:

$$\begin{cases} C_1 \cos(2t_0) + C_2 \sin(2t_0) = x_0, \\ -2C_1 \sin(2t_0) + 2C_2 \cos(2t_0) = x_1. \end{cases}$$

Warunki początkowe

Przykład 6 (ciąg dalszy).

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$C_1 = \frac{1}{2} (2x_0 \cos(2t_0) - x_1 \sin(2t_0)),$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (2x_0 \sin(2t_0) + x_1 \cos(2t_0)).$$

W tym przypadku jest to również **jedyne** rozwiązanie podanego zagadnienia Cauchy'ego.

Warunki początkowe

Przykład 7.

Rozważmy następujące zagadnienie Cauchy'ego:

$$x'(t) = 3\sqrt[3]{x^2(t)}, \quad x(0) = 0.$$

Zauważmy, że rozwiązaniem tego zagadnienia jest funkcja $x(t) = t^3$. Nie jest to jednak jedyne rozwiązanie: jest nim też funkcja $x(t) = 0$.

Zagadnieniem jednoznaczności rozwiązań zajmiemy się później.

Rozwiązanie ogólne

Definicja 6.

Całką ogólną (rozwiązaniem ogólnym) równania różniczkowego

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = 0$$

nazywamy nieskończoną rodzinę rozwiązań zależną od n parametrów, taką że dla dowolnego warunku początkowego, dla którego istnieje rozwiązanie, istnieje rozwiązanie z tej rodziny.

Uwaga.

Nie musi to być rodzina **wszystkich** rozwiązań.

Rozwiązanie ogólne

Przykład 7 (ciąg dalszy).

Wróćmy do równania

$$x'(t) = 3\sqrt[3]{x^2(t)}.$$

Można pokazać, że całką ogólną tego równania jest rodzina funkcji

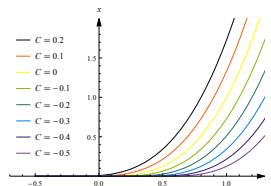
$$x(t) = (t + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie ogólne

Przykład 7 (ciąg dalszy).

Zauważmy, że również każda z funkcji

$$x(t) = \begin{cases} (t + C)^3, & t \geq -C, \\ 0, & t < -C, \end{cases} \quad C \in \mathbb{R},$$



jest rozwiązaniem szczególnym równania, ale nie należą one do wskazanej całki ogólnej.

Uwaga.

Istnieje nieskończenie wiele rozwiązań spełniających $x(0) = 0$.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Zanim przejdziemy do ogólnej teorii rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych, warto wspomnieć o metodach rozwiązywania kilku szczególnych typów równań.

Definicja 7.

Równanie różniczkowe, które daje się zapisać w postaci

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)$$

dla pewnych funkcji f i g , nazywamy równaniem **o zmiennych rozdzielonych** (ang. *separable*).

Równania o zmiennych rozdzielonych

Aby rozwiązać to równanie założmy najpierw, że $g(x) \neq 0$. Możemy wówczas (formalnie) zapisać to równanie w postaci różniczkowej:

$$\frac{1}{g(x)} dx = f(t) dt.$$

Następnie próbujemy odcałkować to równanie, tzn.

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

gdzie zarówno po lewej, jak i prawej stronie mamy jedną ustaloną funkcję pierwotną, ozn. $G(x)$ i $F(t)$.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Rozwiązując równanie $G(x) = F(t) + C$ względem x (jeśli się da) otrzymamy rozwiązanie równania różniczkowego.

Należy jeszcze sprawdzić, czy istnieją takie liczby x_0 , że $g(x_0) = 0$. Wówczas funkcje stałe $x(t) = x_0$ również są rozwiązaniami równania

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x).$$

Rozwiązania te nazywamy **osobliwymi**.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Przykład 8.

Rozważmy równanie

$$\frac{dx}{dt} = x^2(t) \cdot e^{-t}.$$

Jeśli założymy, że $x \neq 0$, to możemy je zapisać w postaci

$$\frac{1}{x^2} dx = e^{-t} dt,$$

czyli mamy do czynienia z równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Przykład 8.

Odcałkowując to równanie otrzymamy

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int e^{-t} dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} = -e^{-t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wobec tego każda funkcja

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t} - C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

jest rozwiązaniem tego równania. Jest to rozwiązanie ogólne.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Przykład 8.

Zauważmy, że również funkcja $x(t) = 0$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{dx}{dt} = x^2(t) \cdot e^{-t},$$

nie jest jednak zawarta w rozwiązaniu ogólnym.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Przykład 9.

Analogicznie postępujemy z równaniem

$$t^2 x'(t) = 1 + x(t).$$

Zakładając, że $x \neq -1$ oraz $t \neq 0$ dostajemy

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \int \frac{1}{t^2} dt \quad \Rightarrow \quad \ln|1+x| = -\frac{1}{t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Otrzymaliśmy więc rozwiązania zadane w postaci niejawnej.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Przykład 9.

Możemy jednak rozwiązanie przekształcić do postaci

$$|1 + x| = e^C \cdot e^{-1/t} = Be^{-1/t},$$

gdzie $B = e^C$ jest pewną **dodatnią** stałą.

Da się wyeliminować także wartość bezwzględną zapisując

$$1 + x = \pm Be^{-1/t} = Ae^{-1/t},$$

gdzie $A = \pm B$ jest pewną **niezerową** stałą.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Przykład 9.

Otrzymaliśmy się rozwiązanie ogólne

$$x(t) = -1 + Ae^{-1/t}, \quad A \neq 0.$$

Zauważmy jednak, że funkcja $x(t) = -1$ (którą wyeliminowaliśmy na początku) również jest rozwiązaniem równania.

Możemy je (w przeciwieństwie do rozwiązania osobliwego w Przykładzie 8) uwzględnić w całości ogólnej:

$$x(t) = -1 + Ae^{-1/t}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Równania o zmiennych rozdzielonych

Można powyższe rozważania sformalizować.

Twierdzenie 1.

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale (a, b) oraz funkcja g jest ciągła i ograniczona na przedziale (c, d) , to całka ogólna równania

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)$$

jest postaci $G(x(t)) = F(t) + C$, $C \in \mathbb{R}$, gdzie G i F są pewnymi ustalonymi funkcjami pierwotnymi funkcji $\frac{1}{g}$ i f .

Ponadto dla wszystkich $t_0 \in (a, b)$ i $x_0 \in (c, d)$ istnieje dokładnie jedna całka szczególna spełniająca warunek początkowy $x(t_0) = x_0$.

Model spadającego obiektu

Przykład 1 (ciąg dalszy).

Wróćmy do przykładu ze swobodnie spadającym ciałem. Powiedzieliśmy już, że zagadnienie opisujące ruch jest postaci

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - \alpha |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Ruch odbywa się w jednym kierunku (w dół) – równanie jest skalarne:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v^2, \quad v(0) = 0,$$

gdzie g jest wartością przyspieszenia grawitacyjnego.

Model spadającego obiektu

Przykład 1 (ciąg dalszy).

Zauważmy, że możemy to równanie zapisać jako

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v^2$$

i jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Stąd

$$\frac{1}{g - (\alpha/m)v^2} dv = dt \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{\alpha g}} \operatorname{arc th} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}} v \right) = t + C,$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$. Z warunku $v(0) = 0$ dostaniemy od razu, że $C = 0$.

Model spadającego obiektu

Przykład 1 (ciąg dalszy).

Możemy z tego wzoru wyznaczyć v :

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}} \operatorname{tgh} \left(\sqrt{\frac{\alpha g}{m}} t \right).$$

Zauważmy, że $\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, a wobec tego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{mg}{\alpha}} \operatorname{tgh} \left(\sqrt{\frac{\alpha g}{m}} t \right) = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$$

i jest to graniczna prędkość, jaką może osiągnąć spadający obiekt.

Równania jednorodne

Do równań o zmiennych rozdzielonych daje się sprowadzić również inne klasy równań.

Definicja 8.

Równanie różniczkowe, które daje się zapisać w postaci

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

dla pewnej funkcji f (takiej, że $f(y) \neq y$), nazywamy równaniem **jednorodnym** (ang. *homogeneous*).

Równania jednorodne

Wprowadźmy pomocniczą funkcję $u(t) = \frac{1}{t}x(t)$. Wówczas oczywiście $x(t) = t \cdot u(t)$ oraz

$$x'(t) = t \cdot u'(t) + u(t).$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} t \cdot u'(t) + u(t) = f(u) &\Rightarrow t \cdot \frac{du}{dt} = f(u) - u \\ &\Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

czyli otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych.

Równania jednorodne

Przykład 10.

Przyjrzyjmy się równaniu

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t}.$$

Zauważmy, że $\frac{t+x}{t} = 1 + \frac{x}{t}$, więc podstawiając $x = tu$ dostajemy $f(u) = 1 + u \neq u$, a stąd

$$t \cdot \frac{du}{dt} + u = 1 + u \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{t} dt.$$

Równania jednorodne

Przykład 10.

Odcałkowując powyższe równanie dostaniemy

$$u(t) = \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

a wracając do właściwych funkcji otrzymujemy całkę ogólną równania w postaci

$$x(t) = t \ln |t| + Ct, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Problem pościgu

Przykład 2 (ciąg dalszy).

Wróćmy do problemu pościgu. Doprowadziliśmy zagadnienie znalezienia trajektorii człowieka płynącego w poprzek rzeki do postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{s}{v} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad y(w) = 0.$$

Zauważmy, że jest to równanie jednorodne. Wprowadzamy wobec tego nową funkcję $x \cdot u = y$ i wówczas

$$x \cdot u'(x) + u(x) = u(x) - \frac{s}{v} \sqrt{1 + u^2(x)}.$$

Problem pościgu

Przykład 2 (ciąg dalszy).

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych i

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{s}{v} \cdot \frac{1}{x} dx,$$

co po odcałkowaniu daje

$$\ln \left| u + \sqrt{1+u^2} \right| = -\frac{s}{v} \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aby pozbyć się modułów (i logarytmów), przeprowadzamy rozumowanie jak w Przykładzie 9.

Problem pościgu

Przykład 2 (ciąg dalszy).

Wówczas

$$u + \sqrt{1 + u^2} = Kx^{-s/v}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Z warunku początkowego mamy $u(w) = \frac{y(w)}{w} = 0$, co prowadzi do $K = w^{s/v}$. Stąd

$$\sqrt{1 + u^2} = \left(\frac{x}{w}\right)^{-s/v} - u.$$

Problem pościgu

Przykład 2 (ciąg dalszy).

Po podniesieniu równości do kwadratu otrzymamy

$$1 + u^2 = \left(\frac{x}{w}\right)^{-2s/v} - 2u \left(\frac{x}{w}\right)^{-s/v} + u^2,$$

a stąd

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{w}\right)^{-s/v} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{w}\right)^{s/v}.$$

Problem pościgu

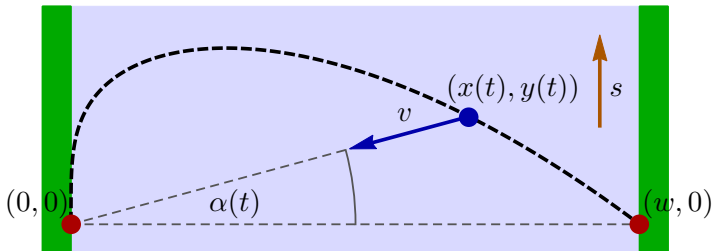
Przykład 2 (ciąg dalszy).

Wracając do oryginalnej funkcji y dostaniemy

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x}{2} \left(\frac{x}{w}\right)^{-s/v} - \frac{x}{2} \left(\frac{x}{w}\right)^{s/v} \\ &= \frac{w}{2} \left(\left(\frac{x}{w}\right)^{1-s/v} - \left(\frac{x}{w}\right)^{1+s/v} \right). \end{aligned}$$

Widzimy, że trajektoria zależy zarówno od szerokości kanału, szybkości pływaka i szybkości nurtu.

Problem pościgu



Równania liniowe

Na koniec tej części wspomnimy o niezwykle istotnej klasie równań zwyczajnych pierwszego rzędu.

Definicja 9.

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu, które daje się zapisać w postaci

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

dla pewnych funkcji p i q , nazywamy równaniem **liniowym** (ang. *linear*).

Równania liniowe

W pierwszej kolejności należy zająć się **równaniem jednorodnym**, tzn. takim, dla którego $q \equiv 0$:

$$x'(t) = -p(t)x(t)$$

(można sprowadzić je do równania jednorodnego w sensie Def. 7).

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, zatem (dla $x \neq 0$)

$$\frac{dx}{x} = -p(t) dt \quad \Rightarrow \quad \ln |x| = - \int p(t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

a po prawej stronie mamy ustaloną funkcję pierwotną funkcji p .

Równania liniowe

Podobnie jak w Przykładzie 9 zapisujemy to jako

$$|x| = e^C \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\} = B \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\}, \quad B > 0,$$

a eliminując wartość bezwzględną otrzymamy

$$x(t) = \pm B \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\} = A \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\},$$

gdzie A jest niezerową stałą. Jednak $x \equiv 0$ również jest rozwiązaniem, więc **całką ogólną równania jednorodnego (CORJ)** jest ostatecznie

$$x(t) = C \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Równania liniowe

Znając rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, możemy uzyskać również rozwiązanie równania niejednorodnego:

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t).$$

Jednym ze sposobów jest tzw. **metoda uzmiennienia stałej**.

Zastąpmy we wzorze na CORJ stałą C nieznaną funkcją $C(t)$:

$$x(t) = C(t) \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\}.$$

Spróbujemy tak dobrać tę funkcję, by powyższy wzór przedstawiał całkę ogólną równania niejednorodnego (CORN).

Równania liniowe

Przypuśćmy, że taka funkcja C istnieje. Wówczas

$$\begin{aligned} x'(t) &= C'(t) \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\} \\ &\quad + C(t) \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\} \cdot (-p(t)) \\ &= C'(t) \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\} - p(t) \cdot x(t). \end{aligned}$$

Zatem (ponieważ funkcja $x(t)$ miała spełniać równanie) mamy

$$C'(t) \cdot \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\} = x'(t) + p(t) \cdot x(t) = q(t).$$

Równania liniowe

Nasze zadanie sprowadza się zatem do znalezienia funkcji C , która spełnia równość

$$C'(t) = q(t) \cdot \exp \left\{ \int p(t) dt \right\},$$

czyli

$$C(t) = \int q(t) \cdot e^{\int p(t) dt} dt + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

gdzie powyższą całkę należy rozumieć jako ustaloną (choć dowolną) funkcję pierwotną.

Równania liniowe

Mamy zatem

$$x(t) = C_1 e^{-\int p(t) dt} + e^{-\int p(t) dt} \cdot \int q(t) \cdot e^{\int p(t) dt} dt,$$

gdzie wszystkie całki są ustalonymi (choć dowolnie wybranymi) funkcjami pierwotnymi.

Zauważmy, że **pierwszy wyraz** jest (znalezioną wcześniej) całką ogólną równania jednorodnego. Z kolei **drugi wyraz** jest pewną **całką szczególną** równania niejednorodnego (CSRN).

Równania liniowe

Można te rozważania podsumować jednym twierdzeniem.

Twierdzenie 2.

$$CORN = CORJ + CSRN.$$

Inaczej: całka ogólna równania niejednorodnego jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego i **jakiegokolwiek** całki szczególnej równania niejednorodnego.

Równania liniowe

Przykład 11.

Znajdziemy całkę ogólną równania

$$x'(t) - \operatorname{ctg}(t) \cdot x(t) = \sin^3 t, \quad t \in (0, \pi).$$

Na początek zajmiemy się CORJ, tzn. rozwiążemy równanie

$$x'(t) = \operatorname{ctg}(t) \cdot x(t).$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.

Równania liniowe

Przykład 11.

Wobec tego

$$\frac{dx}{x} = \frac{\cos t}{\sin t} dt \quad \Rightarrow \quad \ln |x| = \ln |\sin t| + A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Powtarzając wcześniejsze rozumowanie otrzymamy

$$x(t) = C \cdot \sin t, \quad C \in \mathbb{R},$$

i jest to całka ogólna równania jednorodnego.

Równania liniowe

Przykład 11.

Aby znaleźć CSRN wykorzystamy metodę uzmiennienia stałej. Szukamy funkcji postaci

$$x(t) = C(t) \cdot \sin t \quad \Rightarrow \quad x'(t) = C'(t) \cdot \sin t + C(t) \cdot \cos t,$$

a stąd, po wstawieniu do równania, dostaniemy

$$C'(t) \cdot \sin t + C(t) \cdot \cos t - \operatorname{ctg} t \cdot C(t) \cdot \sin t = \sin^3 t.$$

Równania liniowe

Przykład 11.

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy

$$C'(t) = \sin^2 t \quad \Rightarrow \quad C(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t + C_1$$

i ostatecznie funkcja

$$x(t) = C_1 \sin t + \frac{1}{2}t \sin t - \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t$$

jest CORN.

Rozwijany łańcuch

Przykład 3 (ciąg dalszy).

Na początku omawialiśmy zagadnienie rozwijanego łańcucha. Otrzymaliśmy zagadnienie

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} - \frac{g}{v} = 0, \quad v(\ell) = 0.$$

Jest to szczególny przypadek tzw. **równania Bernoulliego**.

Można je sprowadzić do równania liniowego wprowadzając podstawienie $w = v^2$.

Rozwijany łańcuch

Przykład 3 (ciąg dalszy).

Wówczas

$$\frac{dw}{dx} = 2v \frac{dv}{dx} = 2w^{1/2} \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} w^{-1/2} \frac{dw}{dx},$$

a wobec tego

$$\frac{1}{2} w^{-1/2} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{x} w^{1/2} - g w^{-1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dw}{dx} + \frac{2}{x} w = 2g.$$

Otrzymaliśmy zatem niejednorodne równanie liniowe.

Rozwijany łańcuch

Przykład 3 (ciąg dalszy).

Najpierw wyznaczmy CORJ, czyli rozwiążemy równanie

$$w'(x) = -\frac{2}{x}w(x).$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, więc

$$\frac{dw}{w} = -2\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad w(x) = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Rozwijany łańcuch

Przykład 3 (ciąg dalszy).

Pozostała nam do wyznaczenia CSRN, którą znajdziemy korzystając z metody uzmiennienia stałej:

$$w(x) = \frac{C(x)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad w'(x) = \frac{C'(x)}{x^2} - 2\frac{C(x)}{x^3}.$$

Wówczas

$$\frac{C'(x)}{x^2} - 2\frac{C(x)}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2} = 2g.$$

Rozwijany łańcuch

Przykład 3 (ciąg dalszy).

Po uporządkowaniu mamy

$$C'(x) = 2gx^2 \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{2}{3}gx^3 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

czyli CORN jest postaci

$$w(x) = \frac{C_1}{x^2} + \frac{2}{3}gx.$$

Rozwijany łańcuch

Przykład 3 (ciąg dalszy).

Stałą C_1 wyznaczmy z warunku $w(\ell) = v^2(\ell) = 0$, czyli

$$\frac{C_1}{\ell^2} = -\frac{2}{3}g\ell \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{2}{3}g\ell^3,$$

a stąd ostatecznie

$$v^2(x) = \frac{2g}{3} \left(x - \frac{\ell^3}{x^2} \right).$$

Rozwijany łańcuch

Przykład 3 (ciąg dalszy).

$$v^2(x) = \frac{2g}{3} \left(x - \frac{\ell^3}{x^2} \right) = \frac{2gx}{3} \left(1 - \left(\frac{\ell}{x} \right)^3 \right).$$

Jest to funkcja opisująca prędkość łańcucha (w punkcie na skraju półki) w zależności od tego, jaka długość łańcucha już się zsunęła.

Interesuje nas prędkość łańcucha, gdy w całości się zsunie:

$$v^2(L) = \frac{2gL}{3} \left(1 - \left(\frac{\ell}{L} \right)^3 \right).$$

Inne typy równań?

In order to solve this differential equation you look at it till a solution occurs to you.

(George Pólya)

Omówiliśmy jedynie podstawowe typy równań **pierwszego rzędu**. Jest ich jednak dużo więcej, znacząca jest również grupa równań, których nie da się rozwiązać za pomocą jawnych formuł.

Dużo istotniejszym problemem jest wobec tego umiejętność oceny, czy dane równanie w ogóle **ma rozwiązanie**, i czy jest ono **jednoznaczne**. Z taką wiedzą można próbować stosować algorytmy numerycznego przybliżania rozwiązań.

Ale o co chodzi?

Można wskazać przykłady zagadnień, które nie mają rozwiązań.

Przykład 11.

Rozważmy równanie

$$(x'(t))^2 + 3 = 0.$$

Od razu widać, że to równanie nie może mieć rozwiązań o wartościach rzeczywistych.

Daje się też wskazać równania, które mają rozwiązania ogólne, ale nie mają rozwiązań szczególnych spełniających określone warunki.

Ale o co chodzi?

Przykład 12.

Rozważmy zagadnienie

$$x'(t) = 2\sqrt{x(t)}, \quad x(0) = -1.$$

Równanie różniczkowe ma rozwiązanie ogólne (jest to równanie o zmiennych rozdzielonych) $x(t) = (t+C)^2$, jednak nie da się dobrać tak wartości C , by $x(0) = -1$.

Ale o co chodzi?

Przykład 12.

Wystarczy jednak zmodyfikować zagadnienie na

$$x'(t) = 2\sqrt{x(t)}, \quad x(0) = 0,$$

by miało nieskończenie wiele rozwiązań:

$$x(t) = \begin{cases} (t + C)^2, & t \geq -C, \\ 0, & t < -C, \end{cases} \quad C \leq 0.$$

Dodatkowo, funkcja $x(t) = 0$ również jest rozwiązaniem.

Ale o co chodzi?

Przykład 7 (ciąg dalszy).

Taką samą sytuację widzieliśmy już w przypadku zagadnienia

$$x'(t) = 3\sqrt[3]{x^2(t)}, \quad x(0) = 0,$$

które również miało nieskończenie wiele rozwiązań:

$$x(t) = \begin{cases} (t + C)^3, & t \geq -C, \\ 0, & t < -C, \end{cases} \quad C \leq 0,$$

oraz rozwiązanie zerowe.

Ale o co chodzi?

W przypadku niektórych równań (np. liniowych) rozwiązanie istniało dla dowolnych warunków początkowych i było określone niemal wszędzie. Ale nie zawsze tak się da – co było widać we wcześniejszych przykładach.

Można jednak sformułować warunki, które zagwarantują nam istnienie rozwiązania (przynajmniej na jakimś zbiorze). Otrzymamy też sposób na szukanie tych rozwiązań.

Klasyczne twierdzenie

Twierdzenie 3 (Picarda-Lindelöfa).

Niech $\Omega_{a,b} = [t_0 - a; t_0 + a] \times \overline{B(\mathbf{x}_0, b)} \subset \mathbb{R}^{1+m}$ dla pewnych $a, b > 0$.
Rozważmy zagadnienie

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Założmy, że \mathbf{f} jest ciągła na $\Omega_{a,b}$, ozn. $M = \max_{(t, \mathbf{x}) \in \Omega_{a,b}} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$,
oraz jest lipschitzowska względem \mathbf{x} na $\Omega_{a,b}$, tzn.

$$\exists L > 0 \forall (t, \mathbf{x}_2), (t, \mathbf{x}_1) \in \Omega_{a,b} \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1)\| \leq L \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|.$$

Wówczas istnieje $0 < \alpha < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$ taka, że na $[t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$
istnieje jednoznaczne rozwiązanie \mathbf{x} powyższego zagadnienia.

Dowód istnienia rozwiązania

Będziemy chcieli skonstruować rozwiązanie tego zagadnienia.

Zauważmy, że równanie możemy zapisać w postaci całkowej:

$$\int_{t_0}^t \mathbf{x}'(s) ds = \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds,$$

co wynika z Podstawowego Twierdzenia Rachunku Różniczkowego.

Jest to baza naszej konstrukcji.

Dowód istnienia rozwiązania

Zdefiniujmy ciąg funkcji określonych na $\Sigma_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$:

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s)) ds, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{x}_0(t) = 0.$$

Aby ten ciąg był dobrze określony, to musi zachodzić

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \max_{t \in \Sigma_\alpha} \|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_0\| \leq b$$

oraz oczywiście $\alpha \leq a$.

Dowód istnienia rozwiązania

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 \max_{t \in \Sigma_\alpha} \|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_0\| &= \max_{t \in \Sigma_\alpha} \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s)) \, ds \right\| \\
 &\leq \max_{t \in \Sigma_\alpha} \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s))\| \, ds \\
 &\leq \max_{t \in \Sigma_\alpha} \int_{t_0}^t \max_{\tau \in [t_0; t]} \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_n(\tau))\| \, ds \\
 &\leq M \cdot \alpha
 \end{aligned}$$

i jeśli $\alpha \leq \frac{b}{M}$, to ciąg jest dobrze określony.

Dowód istnienia rozwiązania

Każda z funkcji

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s)) ds, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{x}_0(t) = 0,$$

jest więc dobrze określona (i ciągła) na przedziale Σ_α . Ciąg ten nazywa się **iteracjami Picarda**.

Naszym celem jest pokazanie, że jest to ciąg zbieżny (przynajmniej na jakimś przedziale). Aby to wykazać, sprawdzimy, że jest to ciąg Cauchy'ego w przestrzeni funkcji jednostajnie ciągłych na przedziale Σ_α *, ozn. $\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$.

* jest to *przestrzeń Banacha* z normą maksimum, tzn. $\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} = \max_{t \in \Sigma_\alpha} \|\mathbf{y}(t)\|$

Dowód istnienia rozwiązania

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} &= \max_{t \in \Sigma_\alpha} \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s)) \, ds - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_{n-1}(s)) \, ds \right\| \\
 &\leq \max_{t \in \Sigma_\alpha} \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_{n-1}(s))\| \, ds \\
 &\leq L \cdot \max_{t \in \Sigma_\alpha} \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}_n(s) - \mathbf{x}_{n-1}(s)\| \, ds \\
 &\leq L \cdot \max_{s \in \Sigma_\alpha} \|\mathbf{x}_n(s) - \mathbf{x}_{n-1}(s)\| \cdot \max_{t \in \Sigma_\alpha} \int_{t_0}^t ds \\
 &\leq L \cdot \alpha \cdot \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Dowód istnienia rozwiązania

Oznaczmy $r = L \cdot \alpha$, wówczas

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} &\leq r \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \\ \Rightarrow \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} &\leq r^n \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)}. \end{aligned}$$

Jest to pierwszy krok w wykazaniu, że ciąg (\mathbf{x}_n) jest ciągiem Cauchy'ego.

Dowód istnienia rozwiązania

Niech $m \in \mathbb{N}$, wówczas

$$\begin{aligned}
 & \| \mathbf{x}_{n+m} - \mathbf{x}_n \|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \\
 &= \left\| \mathbf{x}_{n+m} - \mathbf{x}_{n+(m-1)} + \mathbf{x}_{n+(m-1)} - \mathbf{x}_{n+(m-2)} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \mathbf{x}_{n+2} - \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \right\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \\
 &\leq \left\| \mathbf{x}_{n+m} - \mathbf{x}_{n+(m-1)} \right\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} + \left\| \mathbf{x}_{n+(m-1)} - \mathbf{x}_{n+(m-2)} \right\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \\
 &\quad + \dots + \left\| \mathbf{x}_{n+2} - \mathbf{x}_{n+1} \right\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} + \left\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \right\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \\
 &\leq \left(r^{n+m-1} + r^{n+m-2} + \dots + r^{n+1} + r^n \right) \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Dowód istnienia rozwiązania

To wyrażenie można zwinąć (ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego):

$$\begin{aligned}
 & \| \mathbf{x}_{n+m} - \mathbf{x}_n \|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \\
 & \leq \left(r^{n+m-1} + r^{n+m-2} + \dots + r^{n+1} + r^n \right) \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \\
 & = r^n \left(r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + r^1 + 1 \right) \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \\
 & = r^n \frac{1 - r^m}{1 - r} \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Wówczas, jeśli $0 < \alpha < 1/L$, to $0 < r < 1$ i otrzymamy, że rozważany ciąg jest ciągiem Cauchy'ego, a więc jest zbieżny.

Dowód istnienia rozwiązania

Oznaczmy granicę naszego ciągu przez $\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n$. Funkcja ta oczywiście spełnia równość

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds$$

dla wszystkich $t \in \Sigma_\alpha$. Pokazuje to, że ta funkcja nie tylko jest ciągła, ale także różniczkowalna we wnętrzu Σ_α , a więc **jest rozwiązaniem** rozważanego zagadnienia początkowego. \square

Pozostała nam do wykazania jednoznaczność tego rozwiązania.

Dowód jednoznaczności rozwiązania

Rozumowanie w dowodzie jednoznaczności będzie podobne do wcześniejszego.

Przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania rozważanego zagadnienia, oznaczmy je przez \mathbf{x} i $\tilde{\mathbf{x}}$. Oczywiście oba spełniają równość całkową:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \tilde{\mathbf{x}}(s)) ds.$$

Możemy policzyć normę różnicy tych rozwiązań.

Dowód jednoznaczności rozwiązania

Rozumując jak wcześniej:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} &= \max_{t \in \Sigma_\alpha} \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) \, ds - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \tilde{\mathbf{x}}(s)) \, ds \right\| \\
 &\leq \max_{t \in \Sigma_\alpha} \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}(s, \tilde{\mathbf{x}}(s))\| \, ds \\
 &\leq L \cdot \max_{t \in \Sigma_\alpha} \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(s) - \tilde{\mathbf{x}}(s)\| \, ds \\
 &\leq L \cdot \max_{s \in \Sigma_\alpha} \|\mathbf{x}(s) - \tilde{\mathbf{x}}(s)\| \cdot \max_{t \in \Sigma_\alpha} \int_{t_0}^t ds \\
 &\leq L \cdot \alpha \cdot \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Dowód jednoznaczności rozwiązania

Ponieważ $r = L \cdot \alpha < 1$, to

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \leq r \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} = 0,$$

a stąd natychmiast dostajemy, że $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$, czyli rozwiązanie **jest jednoznaczne**. □

Kończy to dowód Twierdzenia Picarda-Lindelöfa. Warto zauważyć, że jego dowód daje **metodę konstrukcji** rozwiązań. Należy jednak zastanowić się, czy jego założenia są istotne.

Założenia są istotne!

Przykład 13.

Rozważmy zagadnienie

$$x'(t) = t + x^2(t), \quad x(1) = 1.$$

Nie jesteśmy w stanie znaleźć jawnego wzoru na rozwiązanie, ale możemy sprawdzić, że to rozwiązanie istnieje.

Założenia są istotne!

Przykład 13.

Rozważmy dowolny zbiór $\Omega_{a,b} = [1-a; 1+a] \times [1-b; 1+b]$. Funkcja $f(t, x) = t + x^2$ jest ciągła na tym zbiorze oraz dla $(t, x) \in \Omega_{a,b}$ mamy

$$|f(t, x)| = |t + x^2| \leq 2 + a + 2b + b^2 =: M.$$

Założenia są istotne!

Przykład 13.

Ponadto dla $(t, x_2), (t, x_1) \in \Omega_{a,b}$ mamy

$$\begin{aligned} |f(t, x_2) - f(t, x_1)| &= |t + x_2^2 - t - x_1^2| = |x_2^2 - x_1^2| \\ &= |x_2 + x_1| \cdot |x_2 - x_1| \\ &\leq (2 + a + b) \cdot |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

i niech $L := 2 + a + b$.

Założenia są istotne!

Przykład 13.

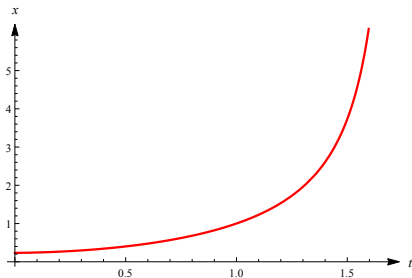
Wobec tego możemy stwierdzić, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie x rozważanego zagadnienia na przedziale $[1 - \alpha; 1 + \alpha]$, gdzie $\alpha < \min\left\{a, \frac{b}{2+a+2b+b^2}, \frac{1}{2+a+b}\right\}$.

Jednak mimo, że funkcja $f(t, x) = t + x^2$ jest ciągła i lipschitzowska na każdej kostce $\Omega_{a,b}$, to rozwiązanie nie jest określone na całej prostej.

Założenia są istotne!

Przykład 13.

Rozwiązanie „ucieka do nieskończoności” w skończonym czasie.



Założenia są istotne!

Przykład 14.

Podobną sytuację możemy zaobserwować przy zagadnieniu

$$x'(t) = e^{x(t)}, \quad x(0) = C,$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą.

Tak jak wcześniej można wykazać, że na dowolnej kostce $\Omega_{a,b}$ spełnione są założenia Twierdzenia Picarda-Lindelöfa*, więc istnieje jednoznaczne rozwiązanie tego zagadnienia.

* spełniona są zawsze, gdy pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest ciągła na kostce $\Omega_{a,b}$

Założenia są istotne!

Przykład 14.

Tym razem możemy nawet znaleźć rozwiązanie tego problemu:

$$x(t) = -\ln(e^{-C} - t).$$

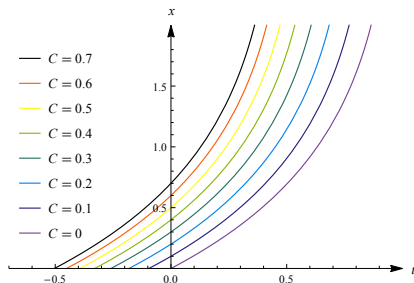
Zauważmy jednak, że jest ono dobrze określone tylko na przedziale

$$-\infty < t < e^{-C}.$$

Założenia są istotne!

Przykład 14.

Nie istnieje też przedział, na którym rozwiązanie byłoby zdefiniowane dla dowolnego warunku początkowego.



Założenia są istotne!

Przykład 15.

Spójrzmy na to, co może się wydarzyć, gdy założenia Twierdzenia Picarda-Lindelöfa nie będą spełnione.

Rozważmy zagadnienie

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0.$$

Można pokazać (klasyczne ćwiczenie z Analizy 1), że funkcja $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ nie jest lipschitzowska (względem x) na żadnej kostce, która ma środek w początku układu współrzędnych.

Założenia są istotne!

Przykład 15.

Założenia Twierdzenia Picarda-Lindelöfa nie są spełnione, więc rozwiązanie (jeśli w ogóle istnieje) nie musi być jednoznaczne.

Istotnie, jedno z rozwiązań to $x(t) = 0$, inne to $x(t) = \frac{1}{4}t^2$. Również funkcja

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & t \geq 0, \\ -\frac{1}{4}t^2, & t < 0, \end{cases}$$

jest rozwiązaniem tego zagadnienia.

Założenia są istotne!

Przykład 16.

Rozważmy jeszcze następujące zagadnienie:

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(0) = 0,$$

gdzie

$$f(t, x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Założenia są istotne!

Przykład 16.

Funkcja f jest ciągła (w szczególności w zerze), jednak biorąc ciąg punktów $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ i $\tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$ otrzymamy, że

$$\begin{aligned} \frac{|f(t, x_n) - f(t, \tilde{x}_n)|}{|x_n - \tilde{x}_n|} &= \frac{\left| x_n \sin \frac{1}{x_n} - \tilde{x}_n \sin \frac{1}{\tilde{x}_n} \right|}{x_n - \tilde{x}_n} \\ &= \dots \\ &= 2(2n + 1), \end{aligned}$$

co pokazuje, że nie jest lipschitzowska.

Założenia są istotne!

Przykład 16.

Nie są więc spełnione założenia Twierdzenia Picarda-Lindelöfa. Zauważmy jednak, że funkcja $x(t) = 0$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia. Czy istnieją inne?

Przypuśćmy, że istnieje inne, niezerowe rozwiązanie rozważanego zagadnienia, oznaczmy je przez y . Niech (a, b) będzie maksymalnym przedziałem, na którym funkcja y jest niezerowa (tzn. dla $t \in (a, b)$ mamy $y(t) \neq 0$, ale $y(a) = y(b) = 0$), założmy że $a \neq -\infty$.

Założenia są istotne!

Przykład 16.

Rozważmy funkcję $u(t) = \ln |y(t)|$ i zauważmy, że

$$\lim_{t \rightarrow a^+} u(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \ln |y(t)| = -\infty,$$

a więc jest to funkcja nieograniczona. Z drugiej strony

$$u'(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \sin \frac{1}{y(t)}$$

i $\limsup_{t \rightarrow a^+} |u'(t)| = 1$, więc jest to funkcja ograniczona – mamy więc sprzeczność.

Założenia są istotne!

Przykład 16.

Podsumowując, zagadnienie nie spełnia założeń Twierdzenia Picarda-Lindelöfa, ale istnieje jego jednoznaczne rozwiązanie.

Trzeba więc pamiętać, że to twierdzenie nie daje warunku równoważnego istnienia i jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych dla równań różniczkowych zwyczajnych

Kilka uwag na koniec

- W przeciwieństwie do równań liniowych, w przypadku równań nieliniowych nie istnieje jeden ogólny wzór na rozwiązanie.
- Twierdzenie Picarda-Lindelöfa daje nam jednak metodę konstrukcji takich rozwiązań.
- Rozwiązania równań nieliniowych mogą nie być jednoznaczne (jeśli „prawa strona” nie jest lipschitzowska).
- Twierdzenie Picarda-Lindelöfa jest zaledwie lokalne – nic nie mówi o maksymalnej dziedzinie rozwiązań.

Równania różniczkowe liniowe rzędu n

Wspomnieliśmy wcześniej, że równania dowolnego rzędu można sprowadzić do równań rzędu 1. Spójrzmy jednak na te równania pod innym kątem, w szczególności na przykładzie równań liniowych.

Definicja 10.

Równanie różniczkowe

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = q(t),$$

gdzie p_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, i q są danymi funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale (a, b) , nazywamy **równaniem liniowym rzędu n** .

Równania różniczkowe liniowe rzędu n

Rozważania należy zacząć od **równań jednorodnych**:

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = 0.$$

Warto w pierwszej kolejności uzasadnić nazwę *liniowe*.

Twierdzenie 4.

Jeżeli funkcje x_1, \dots, x_m spełniają powyższe równanie, to spełnia je w rozważanym przedziale także ich **kombinacja liniowa**, tzn.

$$x(t) = \sum_{k=1}^m C_k x_k(t), \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Równania różniczkowe liniowe rzędu n

Skoro występuje pojęcie kombinacji liniowej, to musi pojawić się również *liniowa niezależność*.

Definicja 11.

Mówimy, że funkcje x_1, \dots, x_m są **liniowo niezależne** na przedziale (a, b) , jeżeli równość

$$\sum_{k=1}^m C_k x_k(t) = 0$$

jest tożsamościowo spełniona na tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy stałe C_k , $k = 1, \dots, m$, są jednocześnie równe zero.

Równania różniczkowe liniowe rzędu n

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = 0.$$

Analogie idą dalej – zbiór rozwiązań jednorodnego równania liniowego ma strukturę przestrzeni liniowej, można więc wyróżnić w nim *bazę*.

Definicja 12.

Jeżeli układ m rozwiązań x_1, \dots, x_m równania liniowego na przedziale (a, b) jest bazą przestrzeni rozwiązań, to nazywamy go **układem fundamentalnym (podstawowym) rozwiązań**.

Równania różniczkowe liniowe rzędu n

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = 0.$$

Można pokazać, że układ m rozwiązań jest układem podstawowym rozwiązań równania liniowego rzędu n wtedy i tylko wtedy, gdy jest liniowo niezależny i $m = n$.

Sprawdzenie, czy układ jest liniowo niezależny wprost z definicji może być trudne. Znany jest jednak prosty warunek równoważny.

Równania różniczkowe liniowe rzędu n

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = 0.$$

Twierdzenie 5.

Układ n rozwiązań x_1, \dots, x_n jednorodnego równania liniowego rzędu n na przedziale (a, b) jest układem fundamentalnym wtedy i tylko wtedy, gdy **wrońskian**, tzn.

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

jest niezerowy dla każdego $t \in (a, b)$.

Równania różniczkowe liniowe rzędu n

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = 0.$$

Można pokazać, że jeśli wrońskian jest niezerowy w jednym punkcie $t_0 \in (a, b)$, to jest już niezerowy na całym przedziale (a, b) .

Znalezienie układu fundamentalnego może być zadaniem trudnym. Istnieje jednak metoda wyznaczania takiego układu w przypadku gdy funkcja p_0, \dots, p_{n-1} są stałe. Wrócimy do tego za chwilę.

Równania różniczkowe liniowe rzędu n

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = 0.$$

Twierdzenie 6.

Jeżeli układ x_1, \dots, x_n stanowi układ fundamentalny rozwiązań jednorodnego równania liniowego na przedziale (a, b) , to

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t), \quad C_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n,$$

jest **całką ogólną** równania na tym przedziale.

Równania niejednorodne

Podobnie jak w przypadku równań pierwszego rzędu, znając rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, możemy uzyskać rozwiązanie równania niejednorodnego:

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = q(t).$$

Można w tym celu wykorzystać poznaną wcześniej **metodę uzmiennienia stałych**, albo tzw. **metodę przewidywań***.

* więcej szczegółów na ćwiczeniach

Równania niejednorodne

Tak jak wcześniej, prawdziwe jest ogólne twierdzenie dotyczące rozwiązań równania niejednorodnego.

Twierdzenie 7.

$$\text{CORN} = \text{CORJ} + \text{CSRN}.$$

Jak już powiedzieliśmy – znalezienie CORJ może być w ogólnym przypadku trudne.

Równania o stałych współczynnikach

Zajmijmy się wyznaczeniem układu fundamentalnego (a więc całki ogólnej) równania jednorodnego

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1x'(t) + p_0x(t) = 0,$$

gdzie p_k , $k = 0, 1, \dots, n - 1$, są liczbami rzeczywistymi.

Ten szczególny przypadek równania nazywamy **równaniem liniowym o stałych współczynnikach**. Spróbujmy znaleźć rozwiązanie tego równania.

Równania o stałych współczynnikach

W przypadku równania rzędu 1, tzn.

$$x'(t) + p_0x(t) = 0,$$

rozwiązanie ogólne jest postaci $x(t) = Ce^{-p_0t}$. Spróbujmy więc poszukać rozwiązania równania rzędu n w postaci

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

gdzie λ jest niewiadomą liczbą.

Równania o stałych współczynnikach

Zauważmy, że

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t) = \lambda^{n-1} e^{\lambda t}, \quad x^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}.$$

Po wstawieniu do równania otrzymamy

$$e^{\lambda t} \left(\lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0 \right) = 0,$$

więc aby równość była spełniona dla wszystkich t , λ musi być pierwiastkiem równania

$$\lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0 = 0.$$

Równania o stałych współczynnikach

Funkcja $x(t) = e^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest rozwiązaniem równania

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0$$

nazywanego **równaniem charakterystycznym**.

W przypadku, gdy równanie charakterystyczne ma n różnych rzeczywistych pierwiastków, ozn. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jest postaci

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

Równania o stałych współczynnikach

Przykład 18.

Rozważmy równanie różniczkowe

$$x^{(4)}(t) - 5x''(t) + 4x(t) = 0.$$

Jest to jednorodne równanie liniowe, którego równanie charakterystyczne jest postaci

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0.$$

Spróbujmy znaleźć pierwiastki tego równania.

Równania o stałych współczynnikach

Przykład 18.

Zauważmy, że

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) = 0,$$

więc pierwiastkami tego równania są

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = -2.$$

Wobec tego rozwiązaniem ogólnym równania jest funkcja

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + C_4 e^{-2t}.$$

Równania o stałych współczynnikach

Równanie charakterystyczne nie musi jednak mieć n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Zauważmy, że jeśli $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem równania (o współczynnikach **rzeczywistych**), to $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}$ również jest pierwiastkiem tego równania.

Okazuje się, że funkcje

$$\operatorname{Re} e^{\lambda_1 t}, \quad \operatorname{Im} e^{\lambda_1 t}$$

są rozwiązaniami równania różniczkowego, które wchodzi w skład rozwiązania ogólnego.

Równania o stałych współczynnikach

Przykład 19.

Rozważmy równanie

$$x'''(t) + 3x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0.$$

Tak jak wcześniej, widzimy, że jest to jednorodne równanie liniowe, a jego równanie charakterystyczne to

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Równania o stałych współczynnikach

Przykład 19.

Wówczas

$$\begin{aligned}\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 2 &= \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda + 2 \\ &= (\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda + 2),\end{aligned}$$

więc pierwiastkami równania charakterystycznego są

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = -2.$$

Równania o stałych współczynnikach

Przykład 19.

Ponadto

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-t/2} \cdot e^{it\sqrt{3}/2} = e^{-t/2} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right),$$

więc rozwiązanie ogólne równania różniczkowego ma postać

$$x(t) = C_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 e^{-2t}.$$

Równania o stałych współczynnikach

Mamy jeszcze trzecią sytuację – w równaniu mogą wystąpić pierwiastki wielokrotne.

Jeśli $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (lub $\lambda_1 \in \mathbb{C}$) jest pierwiastkiem k -krotnym, to w skład rozwiązania ogólnego wejdą funkcje

$$e^{\lambda_1 t}, \quad te^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad t^{k-1}e^{\lambda_1 t}$$

(i analogicznie dla pierwiastków zespolonych).

Równania o stałych współczynnikach

Przykład 20.

Rozważmy równanie

$$6x^{(6)} + 4x^{(5)} + 26x^{(4)} + 11x''' - 25x'' - 20x' - 4x = 0$$

(dla czytelności pomijamy zmienną niezależną t).

Jest to oczywiście jednorodne równanie liniowe, którego równanie charakterystyczne ma postać

$$6\lambda^6 + 4\lambda^5 + 26\lambda^4 + 11\lambda^3 - 25\lambda^2 - 20\lambda - 4 = 0.$$

Równania o stałych współczynnikach

Przykład 20.

Przeprowadzając odpowiednie obliczenia możemy rozłożyć wielomian występujący w równaniu na czynniki:

$$(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^3 (\lambda - 1) = 0,$$

mamy więc zarówno pierwiastki zespolone (pojedyncze), pierwiastki rzeczywiste pojedyncze i wielokrotne:

$$\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} \text{ (potrójny)}, \quad \lambda_4 = 1.$$

Równania o stałych współczynnikach

Przykład 20.

Otrzymujemy więc rozwiązanie ogólne równania różniczkowego postaci:

$$x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + (C_3 + C_4 t + C_5 t^2) e^{-t/2} + C_6 e^t.$$

Uwaga.

Należy zawsze pamiętać o tym, że rozwiązanie ogólne równania liniowego n -tego rzędu jest kombinacją liniową dokładnie n różnych rozwiązań (stanowiących układ fundamentalny).

Czy koniecznie musimy znać wzór?

Równania liniowe stanowią bardzo ważną klasę równań. Na ćwiczeniach i laboratorium zobaczymy, że znajomość konkretnego wzoru na rozwiązanie umożliwi nam wyciągnięcie ciekawych wniosków dotyczących zachowania tych rozwiązań.

Często jednak wiedza o tym jakim wzorem zapisuje się to rozwiązanie nie jest potrzebna. Wystarczy wiedza o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania, a także tzw. analiza jakościowa (często geometryczna) *prawej strony* równania różniczkowego.

Równanie różniczkowe, czy pole wektorowe?

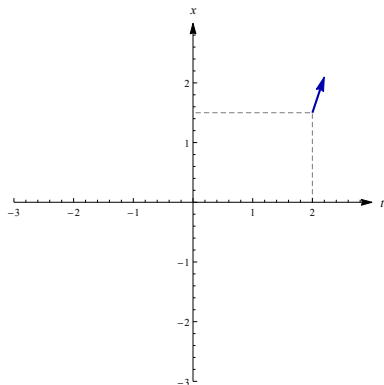
Rozważmy równanie różniczkowe pierwszego rzędu (skalarne):

$$x' = f(t, x)$$

i zastanówmy się co ono oznacza z **geometrycznego punktu widzenia**.

Prawa strona opisuje **kierunek** stycznej do wykresu funkcji $x = x(t)$, która jest rozwiązaniem równania przechodzącym przez punkt (t, x) .

Równanie różniczkowe, czy pole wektorowe?



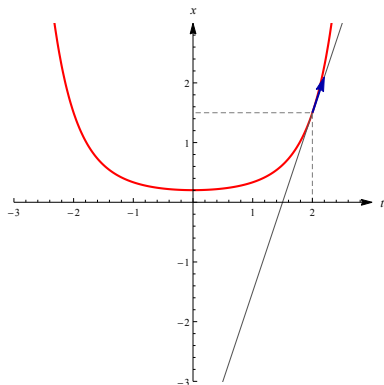
Przykład 21.

Niech

$$f(t, x) = tx.$$

Wówczas, jeśli wyznaczmy rozwiązanie równania przechodzące przez punkt $(2, \frac{3}{2})$, to styczna do jego wykresu ma w tym punkcie nachylenie $x'(2) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

Równanie różniczkowe, czy pole wektorowe?



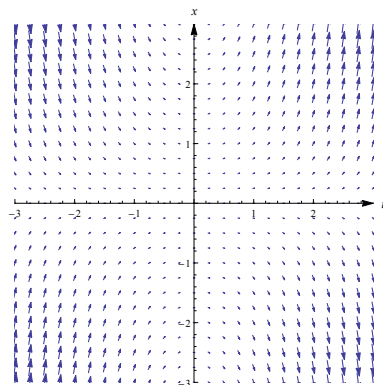
Przykład 21.

Niech

$$f(t, x) = tx.$$

Wówczas, jeśli wyznaczymy rozwiązanie równania przechodzące przez punkt $(2, \frac{3}{2})$, to styczna do jego wykresu ma w tym punkcie nachylenie $x'(2) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

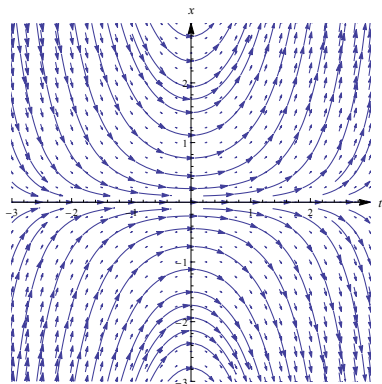
Równanie różniczkowe, czy pole wektorowe?



Przykład 21.

Możemy jednak spojrzeć na problem „globalnie” i wyznaczyć pole wektorowe $(1, f(t, x))$ w każdym punkcie płaszczyzny – jest to tzw. **pole kierunków**.

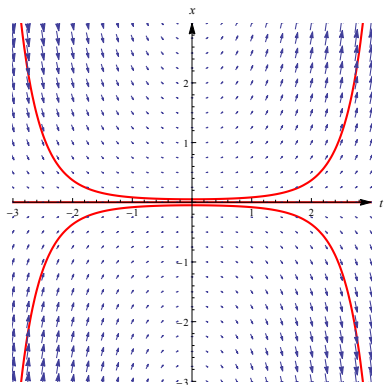
Równanie różniczkowe, czy pole wektorowe?



Przykład 21.

Pozwoli to nam na wyobrażenie sobie, jak będą zachowywały się rozwiązania przechodzące przez konkretne punkty płaszczyzny.

Równanie różniczkowe, czy pole wektorowe?

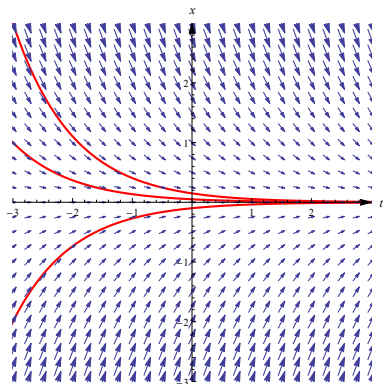


Przykład 21.

Widzimy na przykład, że w zależności od znaku warunku początkowego $x(0)$, rozwiązania będą miały zupełnie inny charakter.

← rozwiązania dla $x(0) = -0,05$,
 $x(0) = 0$ i $x(0) = 0,05$.

Równanie różniczkowe, czy pole wektorowe?



Przykład 22.

Inną sytuację mamy w przypadku równania

$$x' = -x.$$

Tutaj, niezależnie od warunku początkowego, wszystkie rozwiązania mają własność

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Równania autonomiczne

Na szczególną uwagę zasługują tutaj równania, w których *prawa strona* nie zależy bezpośrednio od zmiennej niezależnej.

Definicja 13.

Równanie różniczkowe zwyczajne postaci

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

nazywamy **równaniem autonomicznym**.

Zajmijmy się przez chwilę przypadkiem skalarnym $x' = f(x)$.

Równania autonomiczne

Przykład 23 i 24.

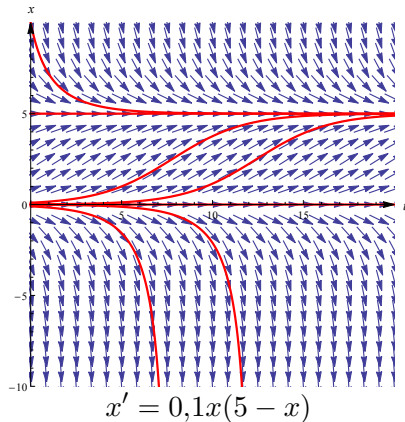
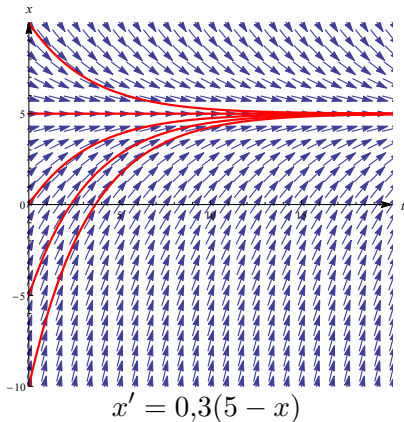
Rozważmy dwa równania:

$$x' = k(A - x), \quad x' = kx(A - x),$$

gdzie $k > 0$ i $A \in \mathbb{R}$ są danymi stałymi.

Można w nich wyróżnić pewne szczególne punkty, dla których *prawa strona* się zeruje. Co to oznacza dla rozwiązania?

Równania autonomiczne



Równania autonomiczne

Przykład 23 i 24.

Punkty, dla których $f(x) = 0$ nazywamy **punktami krytycznymi** (lub **punktami równowagi**).

Widzimy w pierwszym z przykładów, że rozwiązanie $x(t) = A$ jest **stabilne**, tzn. małe odchylenia x nie prowadzą do istotnie różnych rozwiązań (mimo niewielkiej zmiany warunku początkowego wciąż zachodzi $x(t) \rightarrow A$ dla $t \rightarrow \infty$).

Równania autonomiczne

Przykład 23 i 24.

Punkty, dla których $f(x) = 0$ nazywamy **punktami krytycznymi** (lub **punktami równowagi**).

Drugi przykład jest znacznie inny – mamy tutaj dwa rozwiązania równowagowe, $x(t) = A$ oraz $x(t) = 0$, jednak tylko jeden z nich ($x(t) = A$) możemy nazwać **stabilnym**. Drugi ($x(t) = 0$) nazywamy **niestabilnym**.

Równania autonomiczne

Definicja 14.

Niech \mathbf{x} będzie rozwiązaniem $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, gdzie $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n+1})$, na przedziale $[0, +\infty)$. Mówimy, że rozwiązanie \mathbf{x} jest **stabilne w sensie Lapunowa** dla $t \rightarrow +\infty$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $t_0 \geq 0$ oraz $\delta > 0$, że każde rozwiązanie $\tilde{\mathbf{x}}$ układu takie, że

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \tilde{\mathbf{x}}(t_0)\| < \delta,$$

spełnia dla $t > t_0$ warunek

$$\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| < \varepsilon.$$

Równania autonomiczne

Widać jednak z tych przykładów, że aby zbadać długofalowe zachowanie rozwiązań, nie musimy rozwiązywać równania – wystarczy naszkicować jego pole kierunków, aby mieć wystarczająco dużo informacji.

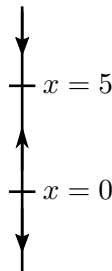
Wyznaczenie pełnego pola kierunków może być kłopotliwe. Wystarczy jednak naszkicować tzw. **portret fazowy** równania.

Równania autonomiczne

Przykład 24 (ciąg dalszy).

Aby narysować portret fazowy w przypadku jednowymiarowym wystarczy narysować oś, zaznaczyć na niej punkty krytyczne i narysować odpowiednie strzałki:

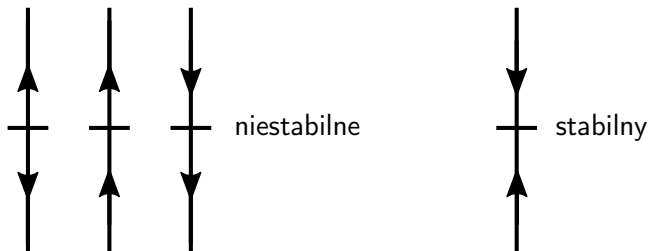
- jeśli $f(x) > 0$: strzałka w górę,
- jeśli $f(x) < 0$: strzałka w dół.



$$x' = 0,1x(5 - x)$$

Równania autonomiczne

Portrety fazowe pozwalają nam sklasyfikować punkty krytyczne jako stabilne lub niestabilne.



Nie tylko jeden wymiar

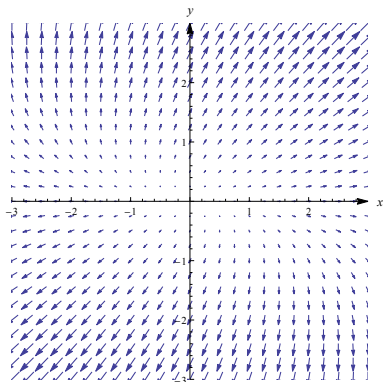
Podobną analizę możemy przeprowadzić dla układów równań (a więc także dla równań wyższych rzędów).

Rozważmy na początek układ dwóch równań liniowych:

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Jest to układ autonomiczny i, podobnie jak w przypadku 1-wymiarowym, możemy z nim związać odpowiednie pole wektorowe.

Nie tylko jeden wymiar



Przykład 25.

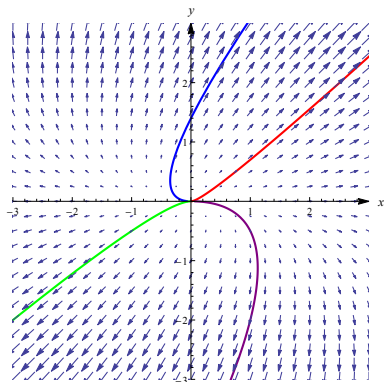
Rozważmy układ

$$x' = x + y, \quad y' = 2y.$$

Pole kierunków interpretujemy jako pole kierunków stycznych do wykresów krzywych

$$t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Nie tylko jeden wymiar

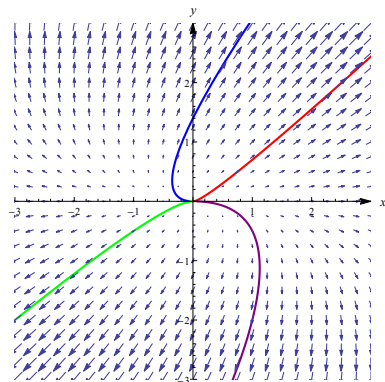


Przykład 25.

Mamy tutaj tylko jeden punkt krytyczny – początek układu współrzędnych.

Analiza stabilności sprowadza się wówczas do analizy **wartości własnych** macierzy układu równań.

Nie tylko jeden wymiar

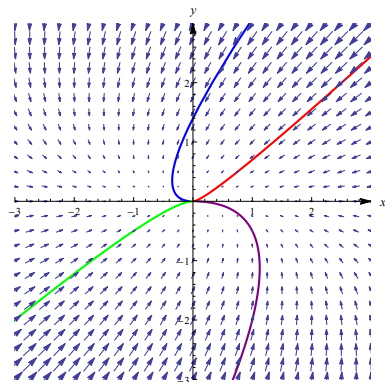


Przykład 25.

$$x' = x + y, \quad y' = 2y.$$

Tutaj mamy wartości własne $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$ (rzeczywiste i dodatnie), a punkt krytyczny $(0, 0)$ jest niestabilny – jest to tzw. **źródło**.

Nie tylko jeden wymiar



Warto wyróżnić jeszcze kilka innych przypadków.

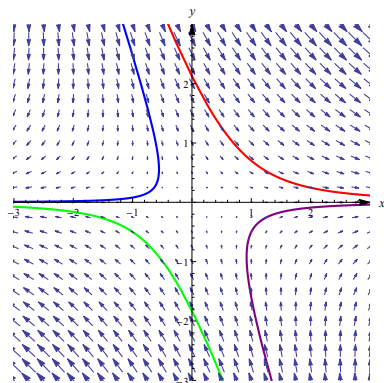
Przykład 26.

$$x' = -x - y, \quad y' = -2y.$$

Wartości własne: $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -2$ (rzeczywiste, ujemne).

Punkt krytyczny $(0, 0)$: stabilny – tzw. **ściek**.

Nie tylko jeden wymiar



Warto wyróżnić jeszcze kilka innych przypadków.

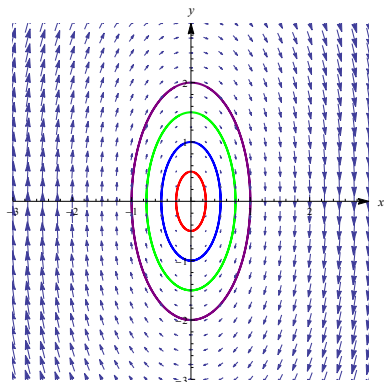
Przykład 27.

$$x' = x + y, \quad y' = -2y.$$

Wartości własne: $\lambda_1 = 1$
i $\lambda_2 = -2$ (rzeczywiste, różnych znaków).

Punkt krytyczny $(0, 0)$:
tzw. **punkt siodłowy**.

Nie tylko jeden wymiar



Warto wyróżnić jeszcze kilka innych przypadków.

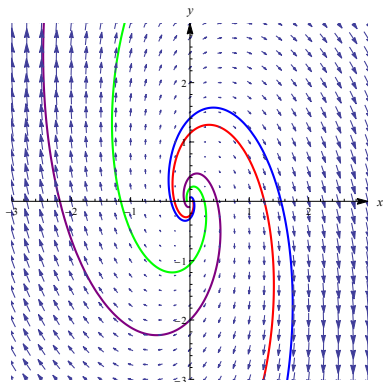
Przykład 28.

$$x' = y, \quad y' = -4x.$$

Wartości własne: $\lambda_1 = -2i$
i $\lambda_2 = 2i$ (czysto urojone).

Punkt krytyczny $(0, 0)$:
tzw. **centrum**.

Nie tylko jeden wymiar



Warto wyróżnić jeszcze kilka innych przypadków.

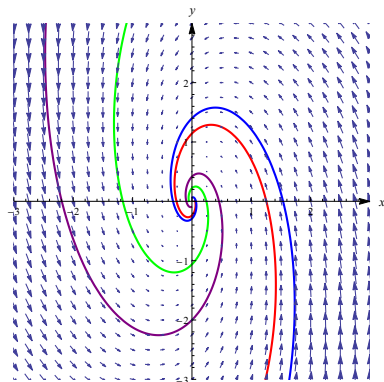
Przykład 29.

$$x' = x + y, \quad y' = -4x + y.$$

Wartości własne: $\lambda_1 = 1 - 2i$ i $\lambda_2 = 1 + 2i$ (część rzeczywista dodatnia).

Punkt krytyczny $(0, 0)$: niestabilny – tzw. **spiralne źródło**.

Nie tylko jeden wymiar



Warto wyróżnić jeszcze kilka innych przypadków.

Przykład 30.

$$x' = -x - y, \quad y' = 4x - y.$$

Wartości własne: $\lambda_1 = -1 - 2i$ i $\lambda_2 = -1 + 2i$ (część rzeczywista ujemna).

Punkt krytyczny $(0,0)$: stabilny – tzw. **spiralny ściek**.

Autonomiczne układy nieliniowe

Analiza stabilności punktów krytycznych w układach równań liniowych jest pierwszym krokiem w analizie stabilności dla dowolnych równań różniczkowych.

Mając układ równań

$$x' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y),$$

możemy skonstruować pole kierunków tak samo, jak w przypadku równań liniowych (i tak samo je zinterpretować). Niezmieniona pozostaje także definicja punktów krytycznych.

Autonomiczne układy nieliniowe

Przykład 31.

Rozważmy równanie

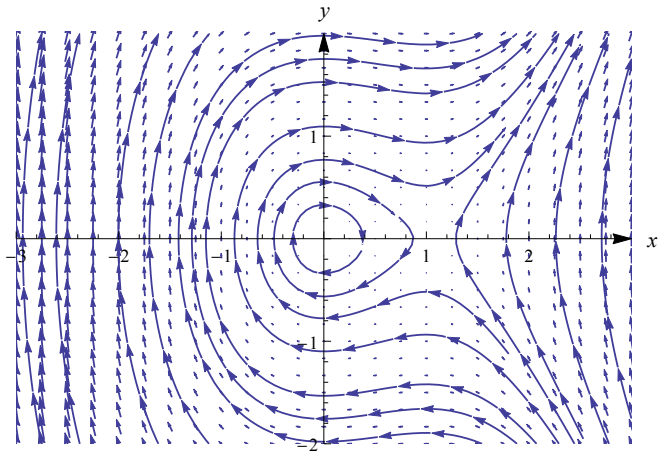
$$x'' = -x + x^2.$$

Zauważmy, że podstawiając $y = x'$ możemy zapisać to równanie jako układ równań:

$$x' = y, \quad y' = -x + x^2.$$

Możemy też łatwo sprawdzić, że układ ten ma dwa punkty krytyczne: $(0, 0)$ oraz $(1, 0)$, a także sprawdzić ich stabilność.

Autonomiczne układy nieliniowe



Autonomiczne układy nieliniowe

Teoretyczna analiza stabilności może być w tym przypadku trudna. Jednak w niektórych przypadkach można sprowadzić analizę do przypadku liniowego – przeprowadzając tzw. linearyzację.

Wówczas badanie stabilności będzie wiązało się ze znajdowaniem wartości własnych odpowiednich macierzy – nie zawsze jednak będzie można to zrobić.

Autonomiczne układy nieliniowe

Definicja 15.

Niech $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ i \mathbf{x}_0 będzie punktem krytycznym. **Linearyzacją** układu w otoczeniu \mathbf{x}_0 nazywamy układ liniowy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, taki że wyjściowy układ można zapisać w postaci

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

gdzie \mathbf{g} jest klasy \mathcal{C}^1 w otoczeniu \mathbf{x}_0 , $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, oraz

$$\lim_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{1+\varepsilon}} = 0 \quad \text{dla pewnego } \varepsilon > 0.$$

Autonomiczne układy nieliniowe

W praktyce sprowadza się to do wyznaczenia wartości macierzy Jakobiego tego układu w punkcie krytycznym \mathbf{x}_0 :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Jest to ta poszukiwana macierz \mathbf{A} .

Zobaczmy jak zachowują się wartości własne tej macierzy w Przykładzie 31.

Autonomiczne układy nieliniowe

Przykład 31 (ciąg dalszy).

Układ autonomiczny

$$x' = y, \quad y' = -x + x^2$$

ma dwa punkty krytyczne $((0, 0)$ i $(1, 0))$, a jego macierz Jakobiego to

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Autonomiczne układy nieliniowe

Przykład 31 (ciąg dalszy).

W punktach $(0, 0)$ i $(1, 0)$ mamy więc

$$\mathbf{A}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wartości własne tych macierzy to

$$\lambda_1 = \mathbf{i}, \lambda_2 = -\mathbf{i}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1,$$

możemy więc wywnioskować, że w zlinearyzowanym układzie punkty krytyczne to **centrum** (?) oraz **siodło**.

Autonomiczne układy nieliniowe

W niektórych przypadkach rzeczywiście można wnioskować o charakterze punktu krytycznego na podstawie jego linearyzacji.

Twierdzenie 8 (Grobmana-Hartmana).

Niech \mathbf{x}_0 będzie punktem krytycznym układu $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ takim, że po linearyzacji macierz układu równań ma wartości własne o niezerowych częściach rzeczywistych. Wówczas jeśli punkt \mathbf{x}_0 jest źródłem, ściekiem lub siodłem dla układu zlinearyzowanego

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

to jest także źródłem, ściekiem lub siodłem dla równania $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Autonomiczne układy nieliniowe

Na ćwiczeniach i laboratorium przeanalizujemy szczegółowo układ równań Lotki-Volterra:

$$x' = x(a - by), \quad y' = y(-c + dx),$$

który opisuje model drapieżnika i ofiary:

- x jest populacją ofiary,
- y jest populacją drapieżnika,

Interesujące są tu zarówno punkty równowagi, w których występują obie populacje, jak i te, w których jedna z populacji wymiera.

Do czego to zmierza?

Nie tylko punkty mogą być graniczne

W przypadku układów nieliniowych

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

trajektorie rozwiązań nie muszą zbiegać wyłącznie do punktów równowagi – może zbliżać się do bardziej skomplikowanych zbiorów.

Prowadzi to do definicji tzw. zbiorów granicznych.

Nie tylko punkty mogą być graniczne

Przykład 32.

Rozważmy równanie tzw. **oscylatora Van der Pola**:

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0, \quad \mu > 0,$$

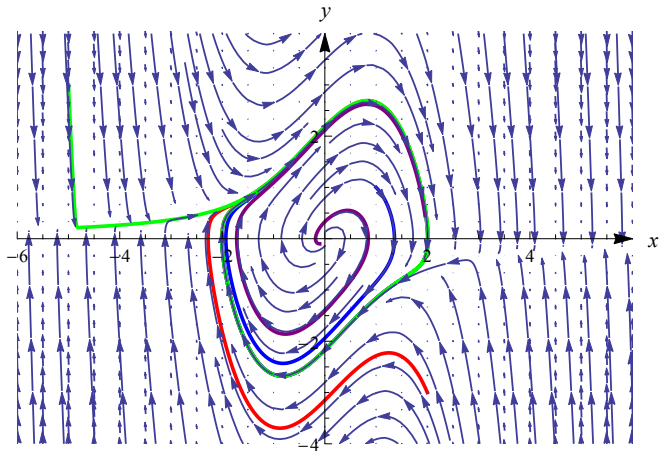
który swoje źródło ma w teorii obwodów elektrycznych. Możemy to równanie zapisać jako układ równań pierwszego rzędu:

$$x' = y, \quad y' = \mu(1 - x^2)y - x$$

i zbadać jego pole kierunków. Przypuśćmy dla uproszczenia $\mu = 1$.

Do czego to zmierza?

Nie tylko punkty mogą być graniczne



Nie tylko punkty mogą być graniczne

Widzimy, że niezależnie od warunków początkowych, wszystkie rozwiązania zbliżają się do pewnego **rozwiązania okresowego** – jest to tzw. cykl graniczny.

Przykład 33.

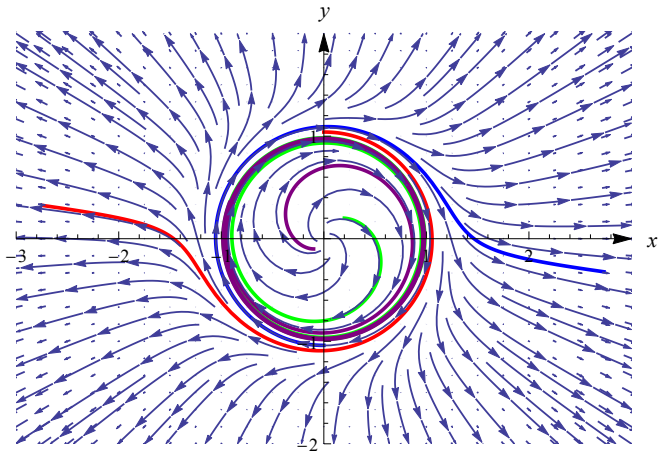
Przyjrzyjmy się rozwiązaniom układu

$$x' = y + (x^2 + y^2 - 1)^2 x, \quad y' = -x + (x^2 + y^2 - 1)^2 y.$$

Można zauważyć, że funkcja $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$ (czyli $x^2(t) + y^2(t) = 1$) jest rozwiązaniem. Okazuje się jednak, że duża klasa rozwiązań będzie przybliżała się do tego cyklu.

Do czego to mierza?

Nie tylko punkty mogą być graniczne



Efekt motyla

Do tej pory rozważaliśmy jedynie przypadki jedno- lub dwuwymiarowe. Ciekawe sytuacje mogą się jednak pojawić w przypadku układów wielowymiarowych ($n > 2$).

Portrety fazowe pewnych układów mogą być niezwykle skomplikowane. Mimo, że są to obrazu deterministycznego układu równań różniczkowych, to ich wygląd raczej kojarzy się ze zjawiskami chaotycznymi, których zachowania nie da się przewidzieć.

Do czego to zmierza?

Efekt motyla

Przykład 34.

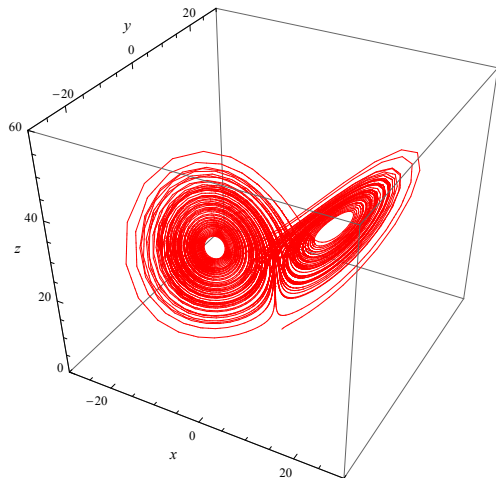
Przyjrzyjmy się tzw. **modelowi Lorenza**:

$$x' = -10x + 10y, \quad y' = 28x - y - xz, \quad z' = -\frac{8}{3}z + xy.$$

Model ten ma swoją genezę w badaniu ruchu konwekcyjnego powietrza w atmosferze i tworzeniu długoterminowych prognoz pogody.

Do czego to zmierza?

Efekt motyla



Efekt motyla

Rozwiązania zbiegają do tzw. **atraktora** w przestrzeni, tzw. **atraktora Lorenza**. Jest to przykład zachowania chaotycznego.

Definicja 16.

Model wykazuje **czułą zależność** od warunków początkowych w punkcie \mathbf{x}_0 , jeśli istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje pewne \mathbf{x}_1 takie, że $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| < \delta$ oraz istnieje czas $t > 0$, dla którego $\|\mathbf{x}^{\mathbf{x}_1}(t) - \mathbf{x}^{\mathbf{x}_0}(t)\| \geq \varepsilon_0$, gdzie $\mathbf{x}^{\mathbf{x}_i}$ jest rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym $\mathbf{x}^{\mathbf{x}_i}(0) = \mathbf{x}_i$.

Atraktor A nazywamy **chaotycznym**, jeśli wykazuje czułą zależność ze względu na warunki początkowe po obcięciu do A .

Do czego to zmierza?

Podsumowanie

KONIEC CZĘŚCI 1