

Podstawy matematyki stosowanej
czyli wstęp do równań różniczkowych
część 3: Przekształcenia całkowe

dr inż. Łukasz Błaszczyk

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska

rok akademicki 2019/2020 (semestr letni)

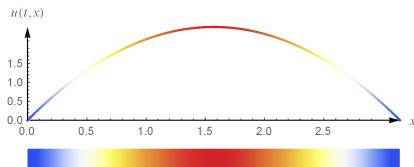
Jak to się zaczęło?

Równania różniczkowe, pojawiając się w różnych modelach, mogą prowadzić do powstania zupełnie nowych narzędzi analizy pewnych wielkości.

Jedno z takich narzędzi pojawiło się w 1807 roku dzięki pracy francuskiego matematyka Josepha Fouriera, który rozważał model przewodnictwa cieplnego.

Jak to się zaczęło?

Rozważmy następujący model: mamy cienki jednorodny pręt o długości π (o stałej gęstości i jednakowym przekroju na całej długości) – z matematycznego punktu widzenia możemy go traktować jako odcinek $[0, \pi]$. Niech funkcja $u = u(t, x)$ opisuje temperaturę pręta w chwili t i w punkcie x .

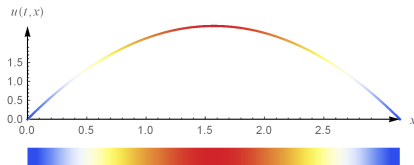


Jak to się zaczęło?

Zmiany temperatury opisuje **równanie przewodnictwa ciepła**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \pi), t > 0,$$

gdzie $k > 0$ jest pewną stałą materiałową.



Jak to się zaczęło?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \pi), t > 0,$$

Jeśli lewy i prawy koniec pręta utrzymywane są w stałej (zerowej) temperaturze, to otrzymujemy tzw. **warunek brzegowy**:

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0.$$

Początkowy rozkład temperatury, czyli **warunek początkowy**, zadany jest przez pewną funkcję

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in (0, \pi).$$

Jak to się zaczęło?

Pomysł: spróbujmy poszukać rozwiązania w szczególnej postaci, tzn.

$$u(t, x) = T(t) \cdot X(x),$$

gdzie T i X są funkcjami jednej zmiennej.

Równanie przyjmuje wówczas postać

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad x \in (0, \pi), t > 0$$

(poszukujemy rozwiązań, które nie są stale równe zero).

Jak to się zaczęło?

Zauważmy, że lewa i prawa strona tej równości zależą od **niezależnych od siebie** zmiennych, a sama równość musi zachodzić dla wszystkich $t > 0$ i $x \in (0, \pi)$, zatem obie strony muszą być **stałe**:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Otrzymaliśmy zatem dwa równania zwyczajne:

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda T(t) &= 0, & t > 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Jak to się zaczęło?

Pierwsze z tych równań ma rozwiązanie ogólne

$$T(t) = D \cdot e^{-\lambda t}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

O rozwiązaniach drugiego równania możemy powiedzieć więcej.

Zauważmy, że z zadanego warunku brzegowego wynika, że

$$\begin{aligned} u(t, 0) = T(t) \cdot X(0) = 0 &\Rightarrow X(0) = 0, \\ u(t, \pi) = T(t) \cdot X(\pi) = 0 &\Rightarrow X(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Jak to się zaczęło?

Mamy więc zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned}X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) &= 0.\end{aligned}$$

Jest to tzw. **zagadnienie Sturm-Liouville'a**, które polega na znalezieniu wartości λ (nazywanych wartościami własnymi), przy których istnieją niezerowe rozwiązania równania (nazywane funkcjami własnymi) spełniające podane warunki brzegowe.

Zauważmy, że aby rozwiązać to zagadnienie należy rozpatrzeć trzy przypadki.

Jak to się zaczęło?

Przypadek 1 – $\lambda < 0$. Wówczas rozwiązanie ogólne jest postaci

$$X(x) = C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}},$$

a warunki brzegowe $X(0) = X(\pi) = 0$ implikują, że $C_1 = C_2 = 0$, zatem $X \equiv 0$.

Nie interesują nas rozwiązania zerowe – ten przypadek odrzucamy.

Jak to się zaczęło?

Przypadek 2 – $\lambda = 0$. Wówczas rozwiązanie ogólne jest postaci

$$X(x) = C_1x + C_2,$$

a warunki brzegowe $X(0) = X(\pi) = 0$ implikują, że $C_1 = C_2 = 0$, zatem $X \equiv 0$.

Nie interesują nas rozwiązania zerowe – ten przypadek odrzucamy.

Jak to się zaczęło?

Przypadek 3 – $\lambda > 0$. Wówczas rozwiązanie ogólne jest postaci

$$X(x) = C_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(x\sqrt{\lambda}).$$

Warunek brzegowy $X(0) = 0$ implikuje, że

$$X(0) = C_1 \cos 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Z kolei uwzględniając warunek $X(\pi) = 0$ dostajemy

$$X(\pi) = C_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0,$$

co daje: $C_2 = 0$ (odrzucaamy) lub $\pi\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Jak to się zaczęło?

Widzimy więc, że niezerowe rozwiązania otrzymamy gdy $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{Z}_+$, i są to rozwiązania postaci

$$X(x) = C \cdot \sin(kx),$$

zatem funkcje

$$u(t, x) = Ae^{-k^2 t} \sin(kx)$$

spełniają równanie przewodnictwa ciepła z zerowymi warunkami brzegowymi. Pozostaje nam teraz tak dobrać stałą A , by spełniony był także warunek początkowy.

Jak to się zaczęło?

Przypuśćmy, że warunek początkowy jest postaci

$$u(0, x) = f(x) = x(\pi - x), \quad x \in (0, \pi).$$

Zauważmy, że nie da się tak dobrać stałych $A \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}_+$, by

$$u(0, x) = A \sin(kx) = x(\pi - x).$$

Ponieważ rozważane równanie jest liniowe, to również kombinacja liniowa (dla różnych k) znalezionych rozwiązań je spełnia. Nie można jednak również tak dobrać stałych $A_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, K\}$, by

$$\sum_{k=1}^K A_k \sin(kx) = x(\pi - x).$$

Jak to się zaczęło?

Fourier wpadł jednak na pomysł, by spróbować poszukać rozwiązania w postaci szeregu:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

Jeśli tylko ten szereg będzie zbieżny, to będzie spełniał wyjściowe równanie, a także warunki brzegowe. Problem sprowadza się wówczas do znalezienia A_k takich, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) = x(\pi - x).$$

Jak to się zaczęło?

Fourier nie tylko twierdził, że można tak zrobić, podał także konkretne wartości współczynników A_k :

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(kx) dx = \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k^3},$$

a wówczas rozwiązanie to

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k^3} e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

Doprowadziło to do zdefiniowania tzw. **szeregów Fouriera**.

Formalna definicja

Ustalmy $\ell > 0$ i przypuśćmy, że pewną funkcję $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ można przedstawić jako sumę szeregu postaci

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right), \quad x \in [-\ell, \ell].$$

- Jak obliczyć współczynniki a_k , b_k tego szeregu?
- Jakie założenia musi spełniać funkcja f , żeby szereg był zbieżny?

Zaobserwujmy najpierw kilka faktów.

Formalna definicja

Lemat 1.

Dla $n, m \in \mathbb{Z}_+$ zachodzą następujące równości:

$$\int_{-\ell}^{+\ell} dx = 2\ell, \quad \int_{-\ell}^{+\ell} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) dx = \ell \cdot \delta_{m,n},$$

$$\int_{-\ell}^{+\ell} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = 0, \quad \int_{-\ell}^{+\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) dx = \ell \cdot \delta_{m,n},$$

$$\int_{-\ell}^{+\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = 0, \quad \int_{-\ell}^{+\ell} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) dx = 0,$$

gdzie $\delta_{m,n}$ to delta Kroneckera.

Formalna definicja

Wobec tego (zakładając, że szereg jest odpowiednio zbieżny) dostaniemy

$$\int_{-\ell}^{+\ell} f(x) dx = a_0 \cdot \ell,$$
$$\int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = a_k \cdot \ell,$$
$$\int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = b_k \cdot \ell,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}_+$.

To już pozwala nam wprowadzić formalną definicję.

Formalna definicja

Definicja 1.

Niech $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie bezwzględnie całkowna. **Trygonometrycznym szeregiem Fouriera** funkcji f jest funkcja

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right),$$

gdzie

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Formalna definicja

Uwagi.

Zauważmy, że

- współczynniki a_k, b_k są dobrze określone i skończone;
- jeśli szereg jest zbieżny (punktowo, choć jeszcze nie wiemy do jakiej funkcji), to jego suma jest funkcją 2ℓ -okresową na \mathbb{R} .

Jakie muszą być spełnione warunki, by szereg był zbieżny?

Kiedy to działa?

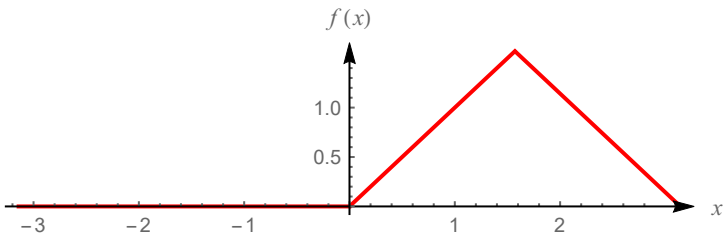
Zacznijmy od dwóch przykładów.

Przykład 1.

Rozważmy funkcję $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{dla } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Kiedy to działa?



Kiedy to działa?

Przykład 1.

Obliczając współczynniki szeregu Fouriera otrzymamy:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \dots = \frac{\pi}{4},$$

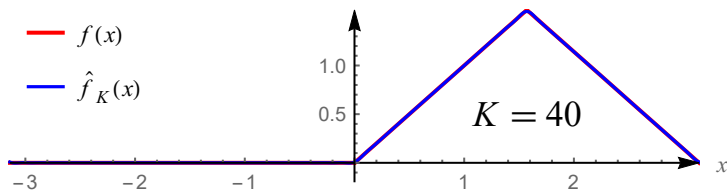
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(kx) dx = \dots = \frac{4}{k^2\pi} \cos \frac{k\pi}{2} \sin^2 \frac{k\pi}{4},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(kx) dx = \dots = \frac{8}{k^2\pi} \cos \frac{k\pi}{4} \sin^3 \frac{k\pi}{4}.$$

Zaobserwujmy jak zachowują się sumy częściowe szeregu Fouriera.

Kiedy to działa?

$$\hat{f}_K(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^K (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$



Kiedy to działa?

Spójrzmy jednak na inny przykład.

Przykład 2.

Rozważmy funkcję $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dla } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Tym razem mamy do czynienia z funkcją nieciągłą.

Kiedy to działa?

Przykład 2.

W tym przypadku otrzymamy:

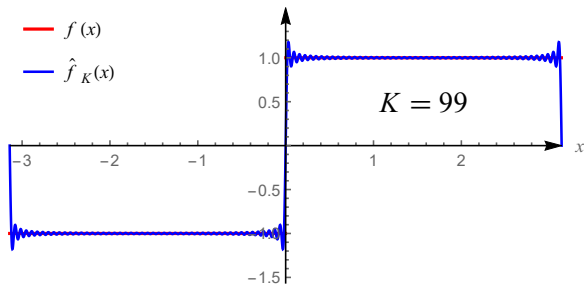
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = 0 \text{ (funkcja nieparzysta),}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0 \text{ (funkcja nieparzysta),}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(kx) dx = \dots = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k).$$

Tym razem będzie można zauważyć pewne charakterystyczne punkty.

Kiedy to działa?



Kiedy to działa?

Przykład 2.

Zauważmy, że szereg Fouriera funkcji f jest postaci

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) \sin(kx).$$

Wówczas

$$\tilde{f}(0) = \tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(+\pi) = 0.$$

Nie jest to przypadek.

Kiedy to działa?

Definicja 2.

Funkcja $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia **warunki Dirichleta**, jeśli

- 1 jest przedziałami monotoniczna,
- 2 ma w przedziale $(-\ell, \ell)$ skończoną liczbę punktów nieciągłości I rodzaju, i jeśli x_0 jest takim punktem, to

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right),$$

- 3 na krańcach przedziału zachodzi

$$f(-\ell) = f(\ell) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\ell^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow \ell^-} f(x) \right).$$

Kiedy to działa?

Twierdzenie 1 (Dirichleta).

Jeśli funkcja $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki Dirichleta, to dla $x \in [-\ell, \ell]$ prawdziwa jest równość

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right),$$

gdzie a_k, b_k są współczynnikami szeregu Fouriera funkcji f .

Uwaga.

Można pokazać, że rozwinięcie w szereg Fouriera jest jednoznaczne.

Kiedy to działa?

Uwaga.

Zauważmy, że

- funkcja z Przykładu 1 spełniała warunki Dirichleta, funkcja z Przykładu 2 – nie;
- w przypadku funkcji przedziałami monotonicznych, mających skończoną liczbę punktów nieciągłości można stwierdzić, że

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right)$$

(i analogicznie na krańcach przedziałów);

Kiedy to działa?

Uwaga.

Zauważmy, że

- jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest 2ℓ -okresowa i spełnia warunki Dirichleta na przedziale $[-\ell, \ell]$, to jest równa swojemu szeregowi Fouriera dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Kiedy to działa?

Warto zaobserwować jeszcze jedną własność szeregów Fouriera:

- jeśli funkcja $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta, to $b_k = 0$ oraz

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{+\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx,$$

- jeśli funkcja $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieparzysta, to $a_k = 0$ oraz

$$b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{+\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Pozwoli nam to na zdefiniowanie transformaty dla funkcji określonej na przedziale niesymetrycznym.

Szereg sinusów i cosinusów

Wprowadzając metodę rozdzielenia zmiennych mieliśmy do czynienia z funkcją

$$f(x) = x(1 - x), \quad x \in (0, \pi),$$

która została rozwinięta w pewien szereg sinusów:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k^3} \sin(kx).$$

Nie jest to jednak funkcja nieparzysta.

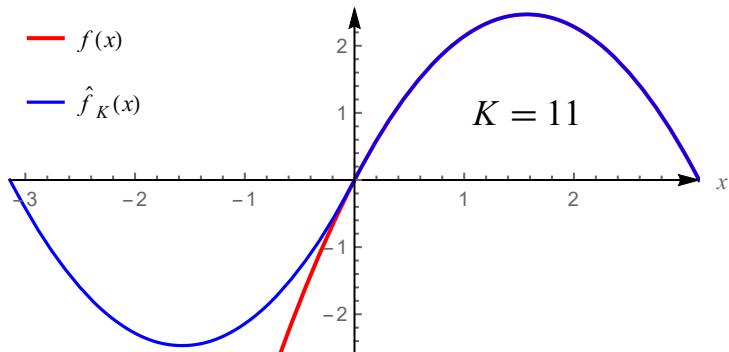
Szereg sinusów i cosinusów

Możemy jednak rozszerzyć tę funkcję w sposób nieparzysty do funkcji $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, tzn.

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dla } 0 < x < \pi, \\ -f(-x), & \text{dla } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{dla } x \in \{0, \pm\pi\}. \end{cases}$$

Otrzymujemy wówczas funkcję nieparzystą, której szereg Fouriera składa się z samych sinusów, a po obcięciu do przedziału $[0, \pi]$ jest równy funkcji f .

Szereg sinusów i cosinusów



Szereg sinusów i cosinusów

Definicja 3.

Niech $f: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie bezwzględnie całkowna. **Szeregiem Fouriera sinusów** funkcji f jest funkcja

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right),$$

gdzie

$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{+\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Szereg sinusów i cosinusów

Prowadzi to do bezpośredniego wniosku z Twierdzenia Dirichleta.

Twierdzenie 2.

Jeśli funkcja $f: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki Dirichleta **wewnątrz przedziału** oraz $f(0) = f(\ell) = 0$, to

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right),$$

gdzie b_k są współczynnikami szeregu Fouriera sinusów funkcji f .

Szereg sinusów i cosinusów

Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić, chcąc rozwinąć funkcję f określoną na przedziale $[0, \ell]$ w szereg Fouriera składający się z samych cosinusów.

W tym przypadku rozszerzamy ją w sposób parzysty do funkcji $g: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, tzn.

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dla } 0 \leq x \leq \ell, \\ f(-x), & \text{dla } -\ell \leq x < 0. \end{cases}$$

Otrzymana funkcja jest parzysta, a jej szereg Fouriera składa się z samych cosinusów.

Szereg sinusów i cosinusów

Definicja 4.

Niech $f: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie bezwzględnie całkowna. **Szeregiem Fouriera cosinusów** funkcji f jest funkcja

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right),$$

gdzie

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{+\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \quad k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}.$$

Szereg sinusów i cosinusów

Wniosek z Twierdzenia Dirichleta jest analogiczny.

Twierdzenie 3.

Jeśli funkcja $f: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki Dirichleta **wewnątrz przedziału** oraz jest ciągła na krańcach przedziału, to

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right),$$

gdzie a_k są współczynnikami szeregu Fouriera cosinusów funkcji f .

Szereg sinusów i cosinusów

Dotychczasowe rozważania mogą prowadzić do dość zaskakujących wniosków.

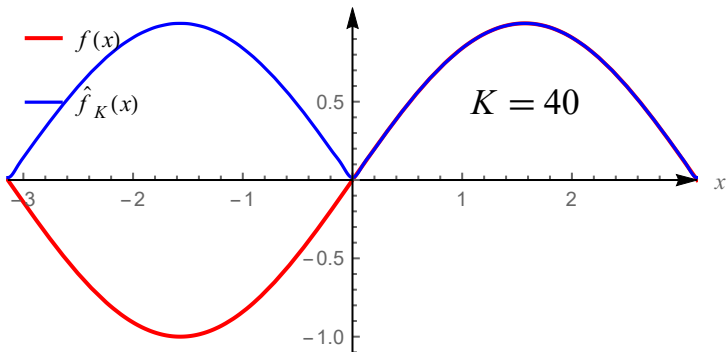
Przykład 3.

Zauważmy, że funkcja $f(x) = \sin x$, rozważana na odcinku $[-\pi, \pi]$ jest sama w sobie swoim rozwinięciem w szereg Fouriera. Ograniczając się jednak do przedziału $[0, \pi]$ możemy ją przedstawić w postaci

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} \cos(2kx),$$

a więc jako szereg samych cosinusów.

Szereg sinusów i cosinusów

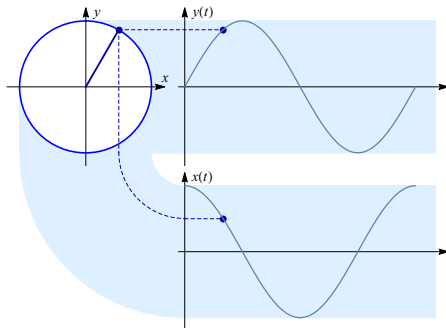


I po co to wszystko?

Można zacząć zastanawiać się, czemu rozważamy szeregi złożone akurat z samych sinusów i cosinusów. Mamy przecież dostępne narzędzie w postaci szeregu Taylora.

Należy jednak pamiętać o tym, że sinus i cosinus to (prawdopodobnie) najważniejsze funkcje okresowe, które pojawiają się w większości modeli związanych np. z drganiami, w szczególności z dźwiękami.

I po co to wszystko?



I po co to wszystko?

Spróbujmy przedstawić szereg Fouriera w nieco innej postaci. Mamy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right).$$

Wprowadźmy wielkość $\omega = \frac{\pi}{\ell}$ – wielokrotności tej liczby to tzw. częstości kołowe definiujące szybkość zmian kolejnych składowych harmonicznym szeregu.

I po co to wszystko?

Otrzymujemy wówczas

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)).$$

Spróbujmy dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ znaleźć takie liczby c_k i φ_k , że zachodzi

$$a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = c_k \cos(k\omega x + \varphi_k).$$

I po co to wszystko?

Nie jest to trudne, wystarczy zauważyć, że

$$c_k \cos(k\omega x + \varphi_k) = c_k \cos(k\omega x) \cos(\varphi_k) - c_k \sin(k\omega x) \sin(\varphi_k),$$

a wówczas poszukiwane liczby to rozwiązania układu równań

$$c_k \cos(\varphi_k) = a_k, \quad c_k \sin(\varphi_k) = -b_k.$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \cos \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \quad \sin \varphi_k = \frac{-b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$

(o ile $\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \neq 0$, w p.p. przyjmujemy $\varphi_k = 0$).

I po co to wszystko?

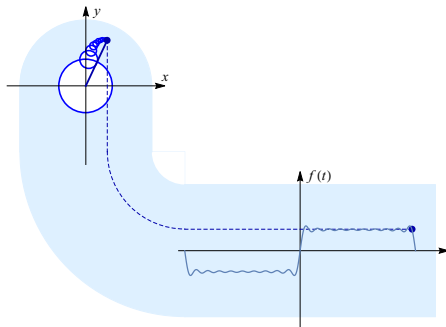
Tak przedstawiony szereg Fouriera

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega x + \varphi_k)$$

gdzie $c_0 = \frac{a_0}{2}$, a $\varphi_0 = 0$ jeśli $a_0 \geq 0$ i $\varphi = \pi$ jeśli $a_0 < 0$, pozwala na zdefiniowanie tzw. **widma amplitudowego** oraz **widma fazowego** funkcji:

- widmo amplitudowe: ciąg c_k , $k = 0, 1, 2, \dots$,
- widmo fazowe: ciąg φ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

I po co to wszystko?



Inne podejście

Z wyznaczaniem widma amplitudowego i fazowego wiąże się jeszcze inna postać szeregu Fouriera, tzw. **wykładniczy szereg Fouriera**.

Zanim do niego przejdziemy – krótka powtórka z algebry. Przypomnijmy, że każdą liczbę zespoloną $z \in \mathbb{C}$ możemy przedstawić jako

$$z = x + iy = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(wygląda znajomo?).

Inne podejście

Korzystając ze wzorów Eulera mamy

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

a stąd

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$

Podstawmy te wzory do trygonometrycznego szeregu Fouriera.

Inne podejście

Niech $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taka, że

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)).$$

(gdzie $\omega = \frac{\pi}{\ell}$). Wówczas

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} (e^{ik\omega x} + e^{-ik\omega x}) + \frac{b_k}{2i} (e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega x} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega x} \right). \end{aligned}$$

Inne podejście

Oznaczmy teraz

$$d_0 = \frac{a_0}{2}, \quad d_k = \frac{a_k - \mathbf{i}b_k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

a wtedy nasz szereg będzie miał postać

$$d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mathbf{i}k\omega x} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{d}_k e^{-\mathbf{i}k\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{\mathbf{i}k\omega x},$$

gdzie $d_{-k} = \bar{d}_k$ dla $k = 1, 2, \dots$

Czy można wyznaczyć współczynniki d_k bezpośrednio?

Przyspieszony kurs analizy funkcji o wartościach zespolonych

Rozważmy funkcję $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $I \subset \mathbb{R}$. Możemy wówczas zapisać

$$f(t) = x(t) + \mathbf{i}y(t),$$

gdzie $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami o wartościach rzeczywistych.

Z geometrycznego punktu widzenia (interpretując liczbę zespoloną jako punkt na płaszczyźnie) możemy funkcję f traktować jako opis parametryczny krzywej na płaszczyźnie.

Przyspieszony kurs analizy funkcji o wartościach zespolonych

Przykład 4.

Funkcja $f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ jest parametrycznym opisem okręgu jednostkowego.

Przykład 5.

Funkcja $f(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ jest parametrycznym opisem elipsy o półosi wielkiej $A + B$ i półosi małej $A - B$.

Przyspieszony kurs analizy funkcji o wartościach zespolonych

Wszystkie operacje na funkcjach zmiennej **rzeczywistej** o wartościach **zespolonych** (obliczanie granic, pochodnych, itd.) można wykonywać po współrzędnych, np. $f'(t) = x'(t) + \mathbf{i}y'(t)$.

Przykład 4 (ciąg dalszy).

Dla $f(t) = e^{\mathbf{i}t}$ mamy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} (\cos t + \mathbf{i} \sin t) = \mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}$$

(działają znane wzory – liczby zespolone traktujemy jako... liczby).

Przyspieszony kurs analizy funkcji o wartościach zespolonych

W szczególności całkę z funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych definiujemy po współrzędnych:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b x(t) dt + \mathbf{i} \int_a^b y(t) dt.$$

Pozwoli to nam na uproszczenie wzorów na współczynniki wyprowadzanego szeregu Fouriera.

Wykładniczy szereg Fouriera

Przeanalizujemy kolejny współczynnik d_k :

$$d_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) dx,$$

dla $k = 1, 2, \dots$, mamy $d_k = \frac{a_k - \mathbf{i}b_k}{2}$, a zatem

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \cos(k\omega x) dx - \frac{\mathbf{i}}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \sin(k\omega x) dx \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) (\cos(k\omega x) - \mathbf{i} \sin(k\omega x)) dx \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) e^{-\mathbf{i}k\omega x} dx. \end{aligned}$$

Wykładniczy szereg Fouriera

Z drugiej strony dla $k = -1, -2, \dots$, mamy $d_k = \overline{d_{-k}}$, czyli

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \cos(-k\omega x) dx + \frac{\mathbf{i}}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \sin(-k\omega x) dx \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) (\cos(k\omega x) - \mathbf{i} \sin(k\omega x)) dx \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) e^{-\mathbf{i}k\omega x} dx. \end{aligned}$$

Widać tutaj pewną prawidłowość.

Wykładniczy szereg Fouriera

Możemy dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ napisać

$$d_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) e^{-ik\omega x} dx$$

a to prowadzi nas już do formalnej definicji wykładniczego szeregu Fouriera.

Wykładniczy szereg Fouriera

Definicja 5.

Niech $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie bezwzględnie całkowalna. **Wykładniczym szeregiem Fouriera** funkcji f jest funkcja

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \exp\left(\mathbf{i} \frac{k\pi}{\ell} x\right),$$

gdzie

$$d_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \exp\left(-\mathbf{i} \frac{k\pi}{\ell} x\right) dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wykładniczy szereg Fouriera

Uwagi.

- Twierdzenie Dirichleta jest prawdziwe również dla tej postaci szeregu Fouriera.
- Jeśli funkcja f jest określona na całej prostej \mathbb{R} i okresowa, to możemy całkować po dowolnym przedziale o długości 2ℓ .
- W literaturze można się spotkać następującą notacją: dla funkcji okresowej o okresie podstawowym T wykładniczy szereg Fouriera definiujemy jako

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \exp\left(\mathbf{i}\frac{2k\pi}{T}x\right), \quad d_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \exp\left(-\mathbf{i}\frac{2k\pi}{T}x\right) dx.$$

Filtrowanie sygnałów

Wróćmy jeszcze do Przykładu 2 z funkcją znaku.

Przykład 2 (ciąg dalszy).

Rozważając funkcję

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dla } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

otrzymaliśmy współczynniki

$$d_0 = 0, \quad d_k = \frac{\mathbf{i}}{k\pi}((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

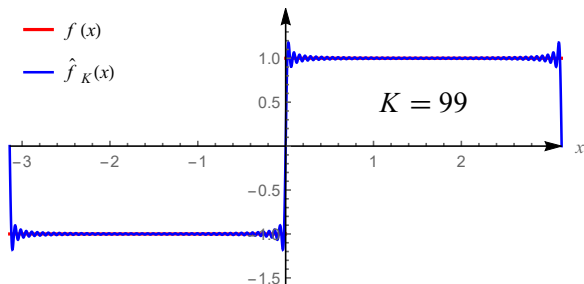
Filtrowanie sygnałów

Z obliczeniowego punktu widzenia, nie da się stworzyć wykresu dowolnej funkcji zadanej za pomocą nieskończonego szeregu – możemy jedynie stosować pewne przybliżenia i próbować rysować wykresy pewnych sum częściowych.

Spójrzmy jeszcze raz jak te sumy częściowe wyglądały w przypadku tej funkcji.

Filtrowanie sygnałów

$$\hat{f}_K(x) = \sum_{k=-K}^K d_k \exp(\mathbf{i}kx).$$



Filtrowanie sygnałów

Można zaobserwować, że w pobliżu punktu nieciągłości $x = 0$ pojawiają się oscylacje. Ponieważ wiemy, że szereg Fouriera w tym punkcie jest zbieżny (do zera), to spodziewalibyśmy się, że te oscylacje będą się wygładzać – tak jednak nie jest.

Dodatkowo można też zauważyć, że oscylacje te mają (z grubsza) tę samą amplitudę dla dowolnego K (choć im wyższe K tym te oscylacje będą się przesuwały bliżej do punktu $x = 0$).

Zjawisko występowania takich oscylacji w pobliżu punktów nieciągłości nazywamy **efektem Gibbsa** – zostało ono szczegółowo opisane na początku XX wieku przez amerykańskiego fizyka Josiaha Willarda Gibbsa.

Filtrowanie sygnałów

Efekt Gibbsa jest zjawiskiem (najczęściej) niepożądanym i próbuje się go wyeliminować. W tym celu stosuje się tzw. **filtrację**.

Definicja 6.

Niech d_k , $k \in \mathbb{Z}$, będą współczynnikami wykładniczego szeregu Fouriera pewnej funkcji $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$. **Filtrowaną sumą częściową** szeregu Fouriera funkcji f nazywamy funkcję

$$\tilde{f}_K(x) = \sum_{k=-K}^K Z\left(\frac{k}{K}\right) d_k \exp\left(\mathbf{i} \frac{k\pi}{\ell} x\right),$$

gdzie $Z: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i parzystą – **filtrem**.

Filtrowanie sygnałów

Dobierając odpowiednio funkcję Z można osiągnąć różne efekty.

Jeden z pomysłów, który doprowadził do zdefiniowania tzw. **filtru Cesàro**, bazował na następującej obserwacji: jeżeli funkcja f jest 2π okresowa i bezwzględnie całkowna, to w każdym punkcie x ciągłości f zachodzi

$$\tilde{f}_K(x) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} S_n(x) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} f(x),$$

gdzie S_n jest n -tą sumą częściową wykładniczego szeregu Fouriera:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n d_k \exp(\mathbf{i}kx).$$

Filtrowanie sygnałów

Po pewnych przekształceniach można sprowadzić ten wzór do postaci

$$\hat{f}_K(x) = \sum_{k=-K}^K \left(1 - \left|\frac{k}{K}\right|\right) d_k \exp(\mathbf{i}kx).$$

Otrzymana w ten sposób funkcja

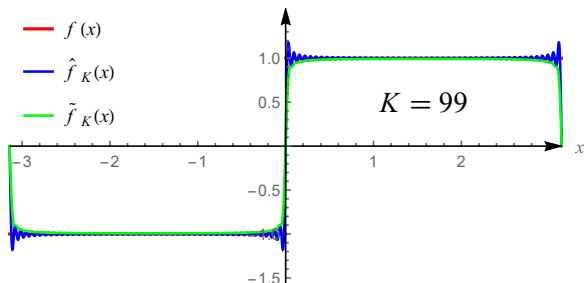
$$Z(t) = 1 - |t|, \quad t \in [-1, 1],$$

nazywana jest filtrem Cesàro.

Zobaczmy jak ten filtr radzi sobie w praktyce, na przykładzie rozważanej wcześniej funkcji.

Filtrowanie sygnałów

$$\tilde{f}_K(x) = \sum_{k=-K}^K \left(1 - \left|\frac{k}{K}\right|\right) d_k \exp(\mathbf{i}kx).$$



Filtrowanie sygnałów

Widzimy, że filtr Cesàro wygładza i tłumi pojawiające się oscylacje.
Podobny efekt można osiągnąć korzystając np. z **filtru Hamminga**:

$$Z(t) = 0,54 + 0,46 \cos(\pi t),$$

albo **filtru Gaussa**:

$$Z(t) = e^{-\alpha\pi^2 t^2}, \quad \alpha > 0.$$

Więcej szczegółów na laboratorium.

Całki Fouriera

- Trygonometryczny szereg Fouriera pozwala na reprezentację funkcji określonych na skończonym przedziale $[-\ell, \ell]$.
- Można jego definicję rozszerzyć, ale tylko na funkcje 2ℓ -okresowe.
- W przypadku funkcji określonych na całej prostej, możemy spróbować zmodyfikować definicję szeregu Fouriera i doprowadzić ją do postaci znaną jako **transformata Fouriera**.
- Spróbujmy zaobserwować, jak (w sposób **nieformalny**) to rozszerzenie przeprowadzić.

Całki Fouriera

Przypuśćmy, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest bezwzględnie całkowna i zapiszmy jej szereg Fouriera na pewnym przedziale $[-\ell, \ell]$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right),$$

gdzie

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \cos \frac{k\pi y}{\ell} dy, \quad b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \sin \frac{k\pi y}{\ell} dy.$$

Będziemy próbowali przejść do granicy $\ell \rightarrow \infty$.

Całki Fouriera

Wyberzmy punkty $\omega_k = \frac{k\pi}{\ell}$, wówczas $\omega_k - \omega_{k-1} = \frac{\pi}{\ell} =: \Delta\omega$ oraz

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) dy + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \cos(\omega_k y) dy \right) \cos(\omega_k x) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \sin(\omega_k y) dy \right) \sin(\omega_k x) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(y) dy \right) \Delta\omega + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \cos(\omega_k y) dy \right) \cos(\omega_k x) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \sin(\omega_k y) dy \right) \sin(\omega_k x) \right) \Delta\omega. \end{aligned}$$

Całki Fouriera

Zauważmy, że ponieważ funkcja f jest bezwzględnie całkowna, to

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(y) dy \right) \Delta\omega \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0,$$

a drugie wyrażenie przypomina sumę Riemanna dla całki oznaczonej. Gdy $\ell \rightarrow \infty$, to $\Delta\omega \rightarrow 0$ i wyrażenie przyjmie postać

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} & \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(\omega y) dy \right) \cos(\omega x) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin(\omega y) dy \right) \sin(\omega x) \right) d\omega. \end{aligned}$$

Jest to tzw. **całka Fouriera** dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Całki Fouriera

Otrzymaliśmy wyrażenie postaci

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} (A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)) d\omega,$$

gdzie

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(\omega y) dy, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin(\omega y) dy.$$

Sumowanie zamieniliśmy na całkowanie, a indeks $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ na zmienną $\omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Wynik dotyczący zbieżności całki Fouriera jest analogiczny do Twierdzenia Dirichleta.

Całki Fouriera

Twierdzenie 4.

Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie bezwzględnie całkowna oraz kawałkami gładka na każdym przedziale $[-\ell, \ell]$, $\ell > 0$. Wówczas, jeśli \tilde{f} jest całką Fouriera funkcji f , to dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right).$$

W szczególności, jeśli funkcja f jest ciągła, to jej całka Fouriera w punkcie x_0 zbiega do $f(x_0)$.

Całki Fouriera

Zobaczmy jak to działa na przykładzie.

Przykład 6.

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } |x| = 1, \\ 0, & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Jest to funkcja spełniająca założenia Twierdzenia 4.

Całki Fouriera

Przykład 6.

Można łatwo policzyć, że

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \cos(\omega y) dy = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega},$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sin(\omega y) dy = 0,$$

a wobec tego

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \sin(\omega x) d\omega.$$

Od całki do transformaty

Zauważmy, że całkę Fouriera (przy założeniu odpowiedniej zbieżności) możemy zapisać także w innej formie:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(\omega y) dy \right) \cos(\omega x) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin(\omega y) dy \right) \sin(\omega x) \right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) (\cos(\omega y) \cos(\omega x) + \sin(\omega y) \sin(\omega x)) dy d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(\omega(y-x)) dy d\omega. \end{aligned}$$

Od całki do transformaty

Można pokazać, że wzór

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(\omega(y-x)) dy d\omega$$

jest prawdziwy przy dokładnie tych samych założeniach, co Twierdzenie 4.

Wykorzystamy go do wyprowadzenia zespolonej postaci całki Fouriera.

Od całki do transformaty

Skorzystajmy ze wzoru $\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$, a wtedy

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(e^{i\omega(y-x)} + e^{-i\omega(y-x)} \right) dy d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega(y-x)} dy d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega(y-x)} dy d\omega. \end{aligned}$$

W przedostatniej całce dokonajmy zamiany zmiennych $\omega \mapsto -\omega$.

Od całki do transformaty

Wówczas

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega(y-x)} dy d\omega \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega(y-x)} dy d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega(y-x)} dy d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \right) e^{i\omega x} d\omega.
 \end{aligned}$$

Jest to zespolona reprezentacja całki Fouriera.

Od całki do transformaty

Otrzymaliśmy wyrażenie

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

gdzie

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy.$$

Wynik dotyczący zbieżności tego wzoru jest analogiczny do Twierdzenia 4, a funkcję $C(\omega)$ będziemy nazywać **transformatą Fouriera** funkcji f .

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Definicja 7.

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie bezwzględnie całkowalna. **Transformatą Fouriera** funkcji f nazywamy funkcję $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Operator (liniowy), który funkcji całkowalnej przyporządkowuje jej transformatę Fouriera, nazywamy **transformacją Fouriera**, ozn. \mathcal{F} (tj. $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$).

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Uwagi.

- Tym razem rozważamy funkcje o wartościach zespolonych – definicja jest poprawna, a założenia twierdzeń o całce Fouriera należy rozpatrywać osobno dla części rzeczywistej i urojonej.
- Można łatwo pokazać, że transformata Fouriera funkcji całkowalnej jest ograniczona, ale także (choć już nie tak łatwo), że jest jednostajnie ciągła.

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Uwagi.

- W literaturze można się spotkać również z inną definicją:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx$$

Jest to definicja równoważna, będziemy mieli tylko inny wzór całkowy:

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i2\pi\xi y} dy \right) e^{i2\pi\xi x} d\xi.$$

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Uwagi.

- Interpretując funkcję f jako funkcję pewnej wielkości zmiennej w czasie, stosując transformację Fouriera przekształcamy ją w dziedzinę pulsacji (częstości kołowej) $\omega = 2\pi f$, gdzie f to częstotliwość zmian (*uwaga: to inne f*).
- Analiza sygnałów (funkcji) z wykorzystaniem transformat Fouriera nazywana jest **analizą częstotliwościową**. Transformatę Fouriera sygnału nazywa się wówczas **widmem sygnału**.

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Przykład 6 (ciąg dalszy).

Wróćmy do przykładu z funkcją

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } |x| = 1, \\ 0, & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Wykonując proste obliczenia można policzyć, że

$$\hat{f}(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$

(wzór prawdziwy również dla $\omega = 0$ – z ciągłości).

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

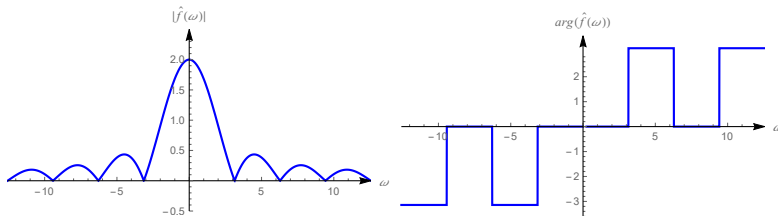
Ponieważ transformata Fouriera jest funkcją o wartościach zespolonych, można wyróżnić dwie wielkości:

- **widmo amplitudowe:** funkcja $|\hat{f}(\omega)|$,
- **widmo fazowe:** funkcja $\arg(\hat{f}(\omega))$.

Można łatwo pokazać, że jeśli funkcja f ma wartości rzeczywiste, to widmo amplitudowe jest funkcją parzystą, a widmo fazowe jest funkcją nieparzystą.

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Widmo sygnału f z Przykładu 6 ($\hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin \omega}{\omega}$):



Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Jednym z istotnych aspektów analizy częstotliwościowej jest możliwość odwracania transformacji Fouriera – znajdowania funkcji f , której transformata jest równa \hat{f} .

Widzieliśmy już wcześniej, że (przy odpowiednich założeniach) mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \right) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

Z tej postaci można wywnioskować wzór na tzw. **odwrotną transformatę Fouriera**.

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Definicja 8.

Niech $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie bezwzględnie całkowna. **Odwrotną transformatą Fouriera** funkcji g nazywamy funkcję $\check{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem

$$\check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Operator (liniowy), który funkcji całkownej przyporządkowuje jej odwrotną transformatę Fouriera, nazywamy **odwrotną transformacją Fouriera**, ozn. \mathcal{F}^{-1} (tj. $\check{g} = \mathcal{F}^{-1}[g]$).

Transformata Fouriera – podstawowe wyniki

Uwagi.

- Można łatwo wywnioskować, że przy założeniach Twierdzenia 4 (oddzielnie dla cz. rzeczywistej i urojonej), jest to rzeczywiście transformacja odwrotna:

$$f(x) = \check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Własności transformat

Transformata Fouriera ma szereg istotnych własności, przydatnych zarówno w obliczaniu samych transformat, jak i ich interpretowaniu. Ze względu na zastosowania zmienną funkcji będziemy traktować jako czas.

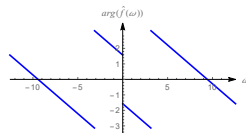
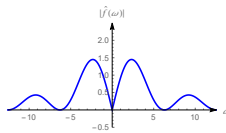
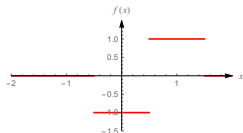
Przesunięcie czasowe:

Niech $t_0 \in \mathbb{R}$ i $g(t) = f(t - t_0)$, wówczas

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega).$$

Przesunięcie czasowe sygnału nie zmienia jego widma amplitudowego, zmienia jedynie widmo fazowe.

Własności transformat



Własności transformat

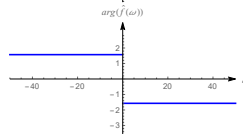
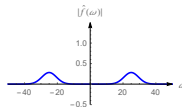
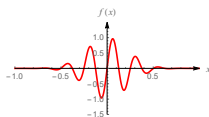
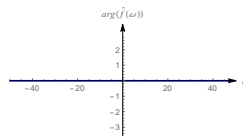
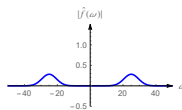
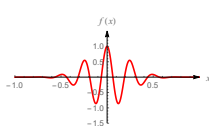
Modulacja:

Niech $\omega_0 \in \mathbb{R}$ i $g_c(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$, $g_s(t) = f(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$,
wówczas

$$\hat{g}_c(\omega) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\omega + \omega_0) + \hat{f}(\omega - \omega_0) \right),$$
$$\hat{g}_s(\omega) = \frac{i}{2} \left(\hat{f}(\omega + \omega_0) - \hat{f}(\omega - \omega_0) \right).$$

Modulacja sygnału „rozsuwa” widmo sygnału w sposób symetryczny lub antysymetryczny.

Własności transformat



Własności transformat

Z własności modulacji można łatwo wywnioskować własność przesunięcia częstotliwościowego.

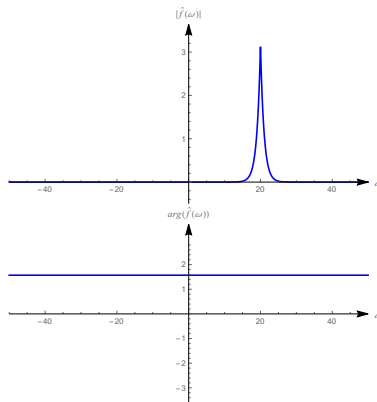
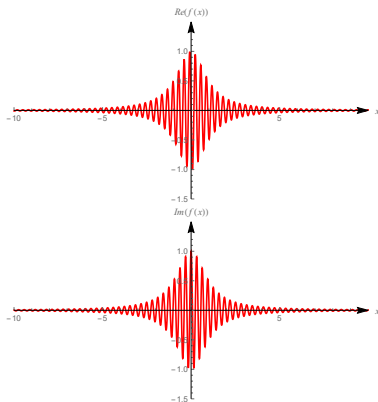
Przesunięcie częstotliwościowe:

Niech $\omega_0 \in \mathbb{R}$ i $g(t) = f(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$, wówczas

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0).$$

Należy pamiętać, że funkcja g ma wartości zespolone.

Własności transformat



Własności transformat

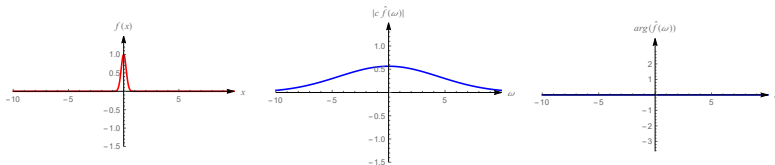
Skalowanie:

Niech $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $g(t) = f(ct)$, wówczas

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Można to interpretować następująco: im szerszy nośnik funkcji, tym węższy nośnik widma. Powyższe twierdzenie działa również dla c ujemnych.

Własności transformat



Własności transformat

Różniczkowanie:

Jeśli f jest absolutnie ciągła i jej pochodna f' jest całkowna, a $g(t) = f'(t)$, to

$$\hat{g}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Ta własność łatwo rozszerza się na pochodne wyższych rzędów.

Własności transformat

Zauważmy, że ta formuła pozwala nam sprowadzić równania różniczkowe zwyczajne do równań algebraicznych. Mając równanie

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1x'(t) + p_0x(t) = f(t),$$

możemy zastosować transformację Fouriera do lewej i prawej strony, wówczas:

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}\omega)^n X(\omega) + p_{n-1}(\mathbf{i}\omega)^{n-1} X(\omega) + \dots + p_1 \mathbf{i}\omega X(\omega) + p_0 X(\omega) \\ = F(\omega), \end{aligned}$$

gdzie X i F to transformaty x i f .

Własności transformat

Stąd otrzymujemy

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{(\mathbf{i}\omega)^n + p_{n-1}(\mathbf{i}\omega)^{n-1} + \dots + p_1\mathbf{i}\omega + p_0},$$

„wystarczy” więc odwrócić transformatę Fouriera.

Tylko co z warunkami początkowymi?

Własności transformat

Twierdzenie 5.

Jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jest bezwzględnie całkowalna, to

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Można też łatwo pokazać, że

$$\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x).$$

To tylko początek

- Wspomniane własności transformat Fouriera to tylko kilka przykładów.
- Można wyprowadzić wiele innych, które mają równie duży wpływ na analizę częstotliwościową sygnałów – własności splotu, zachowywanie energii, itp.
- O tym innym razem.
- Spójrzmy jeszcze na jeden aspekt związany ze współczesną analizą sygnałów.

Transformata, a szereg Fouriera

Jedną z najważniejszych „umiejętności” w analizie sygnałów jest możliwość zrekonstruowania sygnału z jego cyfrowych próbek.

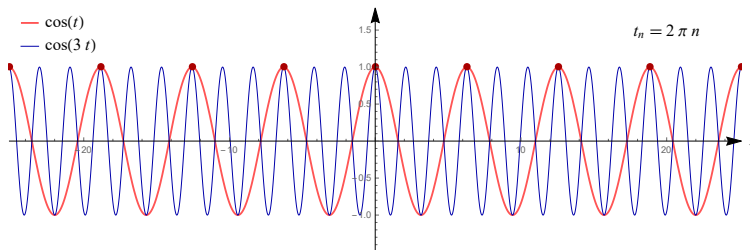
Przykład 7.

Rozważmy bardzo prosty przykład: niech $x(t) = \cos t$ i zarejestrujemy jego próbki, tzn. wartości $x(t_n)$ w pewnych punktach $t_n \in \mathbb{R}$.

Na początek niech $t_n = 2n\pi$, a następnie $t_n = \frac{2}{3}n\pi$. Przypuśćmy, że nie wiemy, od jakiej funkcji x zaczęliśmy, mamy tylko próbki $x(t_n)$.

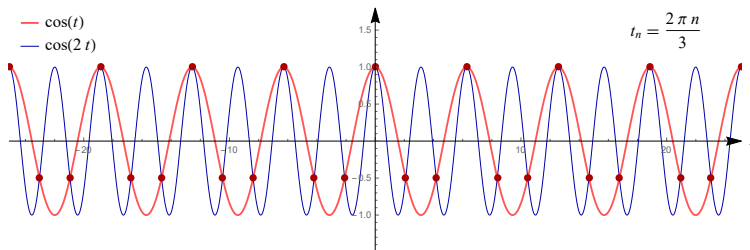
Transformata, a szereg Fouriera

Do takiego zestawu próbek pasuje wiele różnych funkcji – która jest ta „właściwa”?



Transformata, a szereg Fouriera

Do takiego zestawu próbek pasuje wiele różnych funkcji – która jest ta „właściwa”?



Transformata, a szereg Fouriera

Przypuśćmy, że wiemy, że nasza poszukiwana funkcja x ma **ograniczone pasmo**, tzn. istnieje taki odcinek $[-\omega_m, \omega_m]$, poza którym widmo tej funkcji ma jedynie wartości zerowe:

$$\exists \omega_m > 0 \quad \forall_{|\omega| > \omega_m} \quad \hat{x}(\omega) = 0.$$

Najmniejsze takie ω_m będziemy nazywać **szerokością pasma**.

(Zakładamy, że transformatę Fouriera x daje się odwrócić.)

Transformata, a szereg Fouriera

Wówczas

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Z drugiej strony, rozwińmy funkcję \hat{x} w wykładniczy szereg Fouriera na odcinku $[-\omega_m, \omega_m]$:

$$\hat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\mathbf{i} \frac{n\pi}{\omega_m} \omega\right),$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} \hat{x}(\omega) \exp\left(-\mathbf{i} \frac{n\pi}{\omega_m} \omega\right) d\omega.$$

Transformata, a szereg Fouriera

Widzimy więc, że

$$c_n = \frac{\pi}{\omega_m} x \left(-\frac{n\pi}{\omega_m} \right),$$

a stąd

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega) &= \frac{\pi}{\omega_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x \left(-\frac{n\pi}{\omega_m} \right) \exp \left(\mathbf{i} \frac{n\pi}{\omega_m} \omega \right) \\ &= \frac{\pi}{\omega_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x \left(\frac{n\pi}{\omega_m} \right) \exp \left(-\mathbf{i} \frac{n\pi}{\omega_m} \omega \right). \end{aligned}$$

Transformata, a szereg Fouriera

Wstawmy to wyrażenie do wzoru na odwrotną transformatę Fouriera i przeprowadźmy (nieformalnie) obliczenia:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\omega_m} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n\pi}{\omega_m}\right) \exp\left(-\mathbf{i} \frac{n\pi}{\omega_m} \omega\right) \exp(\mathbf{i}\omega t) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\omega_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n\pi}{\omega_m}\right) \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} \exp\left(\mathbf{i}\omega \left(t - \frac{n\pi}{\omega_m}\right)\right) d\omega = \dots \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n\pi}{\omega_m}\right) \frac{\sin(\omega_m t - n\pi)}{\omega_m t - n\pi}.
 \end{aligned}$$

Jest to przepis na rekonstrukcję funkcji z jej próbek.

Twierdzenie Shannona o próbkowaniu

Twierdzenie 6.

Niech $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją, której transformata Fouriera \hat{x} jest odwracalna i spełnia warunek

$$\exists \omega_m > 0 \forall_{|\omega| > \omega_m} \hat{x}(\omega) = 0.$$

Wówczas, jeżeli ta funkcja jest próbkowana z okresem $T_s = \frac{\pi}{\omega_m}$, to jej wartości między chwilami próbkowania można odtworzyć na podstawie próbek $x(nT_s)$ za pomocą wzoru

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \frac{\sin(\omega_m(t - nT_s))}{\omega_m(t - nT_s)}.$$

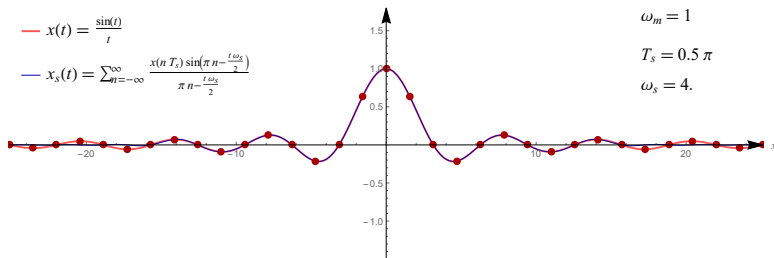
Twierdzenie Shannona o próbkowaniu

- Wzór w Twierdzeniu 6 nosi nazwę **wzoru interpolacyjnego Kotelnikowa-Shannona**.
- Próbkowanie w tym twierdzeniu odbywa się z częstością $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\omega_m$, czyli z częstością dwukrotnie większą od maksymalnej występującej w widmie funkcji. Tę częstotliwość nazywa się **częstością Nyquista**.
- Aby poprawnie zrekonstruować sygnał między chwilami próbkowania musi być spełniony warunek $\omega_s \geq 2\omega_m$.

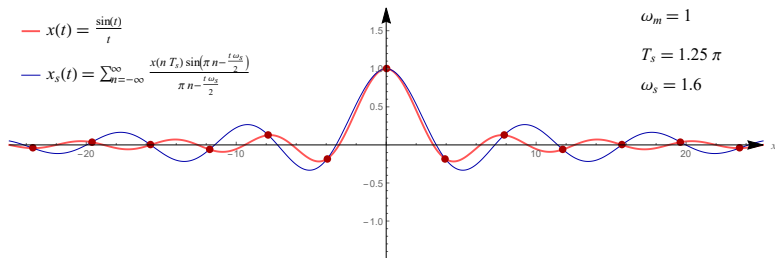
Twierdzenie Shannona o próbkowaniu

- Z Twierdzeniem Kotelnikowa-Shannona spotykamy się właściwie codziennie – popularna częstotliwość próbkowania dźwięków do zapisu cyfrowego to ok. 44,1 kHz, wynikająca z faktu, że maksymalna częstotliwość rejestrowana przez ludzkie ucho to ok. 20 kHz.
- Podobny powód stoi za tym, że kamery filmowe rejestrują z częstotliwością 24 fps (ramek na sekundę).
- Próbkowanie z mniejszą częstotliwością może mieć różne konsekwencje – przede wszystkim może zniekształcić sygnał.

Twierdzenie Shannona o próbkowaniu



Twierdzenie Shannona o próbkowaniu



Twierdzenie Shannona o próbkowaniu

- Występuje wówczas zjawisko aliasingu. Można je zaobserwować np. obserwując obracające się koło samochodowe lub śmigła helikoptera – wydaje się, że poruszają się z mniejszą częstotliwością niż w rzeczywistości.
- Rzeczywiste sygnały rzadko mają ograniczone pasmo – próbuje się je wówczas filtrować, tak by „wyciąć” składowe o zbyt dużych częstotliwościach.

Filtrowanie (po raz drugi)

Idea, jaka stoi za pojęciem **filtracji** funkcji określonych na całej prostej, jest taka sama jak w przypadku funkcji okresowych (lub określonych na odcinku).

Definicja 9.

Niech $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją, której transformata Fouriera \hat{x} jest odwracalna. **Filtracja** funkcji x polega na zmodyfikowaniu jej widma:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\omega) \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

gdzie $\hat{h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją parzystą, nazywaną **charakterystyką częstotliwościową filtru**.

Filtrowanie (po raz drugi)

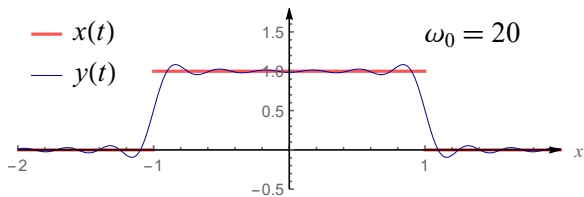
W najprostszym przypadku może to być tzw. filtr prostokątny:

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dla } |\omega| < \omega_0, \\ 1/2, & \text{dla } |\omega| = \omega_0, \\ 0, & \text{dla } |\omega| > \omega_0, \end{cases}$$

gdzie $\omega_0 > 0$ jest pewną ustaloną stałą.

Jest to przykład **filtru dolnoprzepustowego** – przepuszcza on wyłącznie niskie częstotliwości, zeruje te wysokie.

Filtrowanie (po raz drugi)



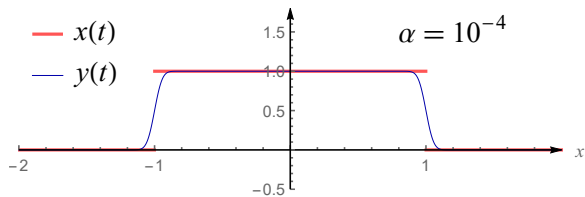
Filtrowanie (po raz drugi)

W praktyce stosuje się filtry, których charakterystyki są funkcjami gładkimi, np. **filtr Gaussa**:

$$\hat{h}(\omega) = e^{-\alpha\pi^2\omega^2}.$$

Filtry dolnoprzepustowe mają cechę wygładzania funkcji (w szczególności wygładzania krawędzi).

Filtrowanie (po raz drugi)



Filtrowanie (po raz drugi)

Działanie odwrotne mają tzw. **filtry górnoprzepustowe**. Tak jak wcześniej, możemy wskazać tutaj prosty przykład:

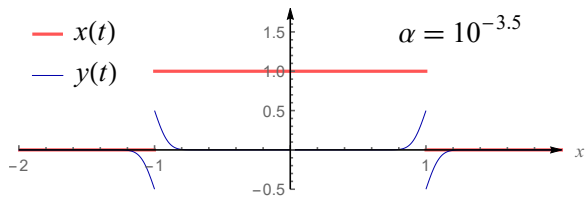
$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{dla } |\omega| < \omega_0, \\ 1/2, & \text{dla } |\omega| = \omega_0, \\ 1, & \text{dla } |\omega| > \omega_0, \end{cases}$$

ale także popularniejszy dolnoprzepustowy filtr Gaussa:

$$\hat{h}(\omega) = 1 - e^{-\alpha\pi^2\omega^2}.$$

Filtry te mają cechę uwypuklania krawędzi.

Filtrowanie (po raz drugi)



Filtrowanie (po raz drugi)

- Omawiane w tej części kwestie z łatwością uogólniają się na przypadek wielowymiarowy, tzn. na funkcje wielu zmiennych.
- Można wówczas wyraźnie zauważyć także działanie omawianych tutaj filtrów, w szczególności dolnoprzepustowych (wygładzających) i górnoprzepustowych (krawędziowych).
- Zajmiemy się tym (głównie na laboratorium) omawiając transformacje dyskretne.

Od szeregu Fouriera do przekształceń dyskretnych

Wróćmy do szeregu Fouriera, tym razem wykładniczego.

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie T . Jej szereg Fouriera jest na przedziale $[0, T]$ postaci

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \exp\left(\mathbf{i} \frac{2k\pi}{T} t\right),$$

gdzie

$$d_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-\mathbf{i} \frac{2k\pi}{T} t\right) dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Od szeregu Fouriera do przekształceń dyskretnych

Wiemy, że przy pewnych założeniach, szereg ten zbiega w punkcie t do $f(t)$.

Rozważmy problem przybliżenia współczynników d_k za pomocą sum Riemanna. Podzielmy odcinek $[0, T]$ na N podprzedziałów identycznej długości $\frac{T}{N}$, a następnie wybierzmy w każdym takim podprzedziale punkt, tzn.

$$t_n \in \left[\frac{nT}{N}, \frac{(n+1)T}{N} \right], \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Od szeregu Fouriera do przekształceń dyskretnych

Wówczas

$$d_k \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \exp\left(-i \frac{2kn\pi}{N}\right)$$

(dla funkcji całkownalnych w sensie Riemanna powyższe sumy będą zbieżne do d_k dla $N \rightarrow \infty$).

Jest to podstawa definicji **dyskretnej transformaty Fouriera** ciągu N liczb zespolonych.

Od szeregu Fouriera do przekształceń dyskretnych

Definicja 10.

Niech $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$. **N -punktową dyskretną transformatą Fouriera** wektora \mathbf{u} nazywamy ciąg $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dany wzorem

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \exp\left(-i \frac{2kn\pi}{N}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Często będziemy skracać nazwę dyskretnej transformaty Fouriera do DFT (ang. *discrete Fourier transform*).

Kilka prostych przykładów

Przykład 8.

Rozważmy sygnał (wektor) stały, tzn. $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$,
 $u_n = A$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Wówczas

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2\pi i k n / N} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i k n / N} = A \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-2\pi i k / N} \right)^n.$$

Zauważmy, że mamy tutaj do czynienia z sumą N wyrazów ciągu geometrycznego.

Kilka prostych przykładów

Przykład 8.

Dla $k \neq K \cdot N$, $K \in \mathbb{Z}$, mamy

$$\hat{u}_k = A \cdot \frac{1 - (e^{-2\pi i k/N})^N}{1 - e^{-2\pi i k/N}} = A \cdot \frac{1 - e^{-2\pi i k}}{1 - e^{-2\pi i k/N}} = 0,$$

bo $e^{-2\pi i k} = \cos(2\pi k) - i \sin(2\pi k) = 1$.

Z drugiej strony dla $k = K \cdot N$, $K \in \mathbb{Z}$, otrzymujemy

$$\hat{u}_k = A \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-2\pi i K} \right)^n = A \sum_{n=0}^{N-1} 1 = A \cdot N.$$

Kilka prostych przykładów

Przykład 9.

Spójrzmy teraz na nieco inny sygnał: $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$,
gdzie

$$u_n = \begin{cases} A, & \text{dla } n = 0, 1, \dots, \ell - 1, \\ 0, & \text{dla } n = \ell, \ell + 1, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Sytuacja jest tutaj bardzo podobna do wcześniejszej.

Kilka prostych przykładów

Przykład 9.

Dla $k \neq K \cdot N$, $K \in \mathbb{Z}$, mamy

$$\begin{aligned} \hat{u}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2\pi i k n / N} = A \sum_{n=0}^{\ell-1} e^{-2\pi i k n / N} \\ &= A \sum_{n=0}^{\ell-1} \left(e^{-2\pi i k / N} \right)^n = A \cdot \frac{1 - (e^{-2\pi i k / N})^\ell}{1 - e^{-2\pi i k / N}} \\ &= A \cdot e^{-\pi i k (\ell-1) / N} \cdot \frac{\sin(\pi k \ell / N)}{\sin(\pi k / N)}, \end{aligned}$$

a dla $k = K \cdot N$, $K \in \mathbb{Z}$, jak wcześniej $\hat{u}_k = A \cdot \ell$.

Kilka prostych przykładów

Przykład 10.

Rozważmy jeszcze jeden przykład: $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$,
 $u_n = \sin(\pi\alpha n/N)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{K \cdot N : K \in \mathbb{Z}\}$.

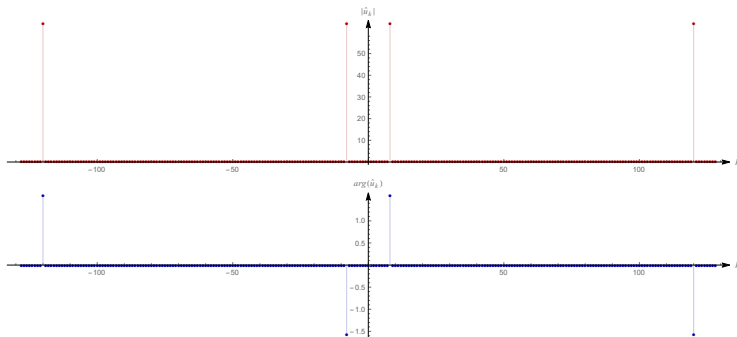
Można obliczyć, że

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \operatorname{sgn}(k) \cdot \frac{N}{2i}, & \text{dla } \frac{2k \pm \alpha}{2N} \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2i} \left(\frac{1 - e^{\pi i \alpha}}{1 - e^{-\pi i (2k - \alpha)/N}} - \frac{1 - e^{-\pi i \alpha}}{1 - e^{-\pi i (2k + \alpha)/N}} \right), & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Z samego wzoru niewiele można wyczytać, warto jednak spojrzeć na wykres wartości DFT tej funkcji.

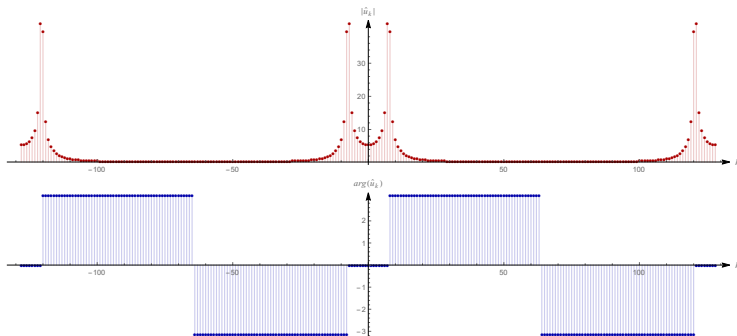
Kilka prostych przykładów

Wykres \hat{u} dla $N = 128$ i $\alpha = 16$.



Kilka prostych przykładów

Wykres \hat{u} dla $N = 128$ i $\alpha = 15$.



Okresowość DTF

We wszystkich wcześniejszych przykładach dało się zaobserwować, że uzyskane transformaty mają pewną własność – są okresowe. Nie jest to przypadek.

Zauważmy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\hat{u}_{k+N} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2\pi i(k+N)n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2\pi i k n/N} \cdot e^{-2\pi i n} = \hat{u}_k,$$

bo dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ mamy $e^{-2\pi i n} = 1$.

Ciąg $\hat{\mathbf{u}}$ jest więc okresowy z okresem N .

Okresowość DTF

Z tego względu zazwyczaj ogranicza się ciąg $\hat{\mathbf{u}}$ to wektora $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^N$. Domyślnie (we wszystkich pakietach obliczeniowych) wynikiem obliczania DFT jest wektor

$$\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1}),$$

jednak wygodnie (zwłaszcza ze względu na interpretację wyniku) jest umieszczać „zerową” częstotliwość (czyli dla $k = 0$) w środku wektora.

Okresowość DTF

Wówczas (w zależności od parzystości N) przedstawia się wektor:

- dla N parzystego:

$$\left(\hat{u}_{\frac{N}{2}}, \hat{u}_{\frac{N}{2}+1}, \dots, \hat{u}_{N-1}, \underbrace{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{\frac{N}{2}-1}}_{N/2} \right),$$

- dla N nieparzystego:

$$\left(\hat{u}_{\frac{N+1}{2}}, \hat{u}_{\frac{N+1}{2}+1}, \dots, \hat{u}_{N-1}, \underbrace{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{\frac{N-1}{2}}}_{(N+1)/2} \right).$$

Okresowość DTF

Można to zapisać również w postaci:

- dla N parzystego:

$$\left(\hat{u}_{-\frac{N}{2}}, \hat{u}_{-\frac{N}{2}+1}, \dots, \hat{u}_{-1}, \underbrace{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{\frac{N}{2}-1}}_{N/2}\right),$$

- dla N nieparzystego:

$$\left(\hat{u}_{-\frac{N+1}{2}}, \hat{u}_{-\frac{N+1}{2}+1}, \dots, \hat{u}_{-1}, \underbrace{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{\frac{N-1}{2}}}_{(N+1)/2}\right).$$

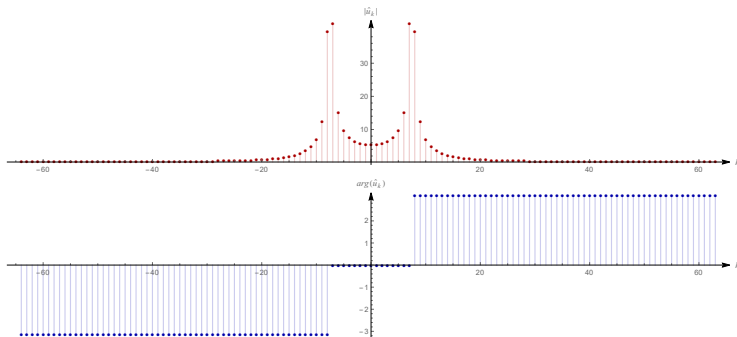
Okresowość DTF

Pozwala to także na zaobserwowanie własności analogicznych do własności transformaty Fouriera. W przypadku wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$:

- **dyskretne widmo amplitudowe**, czyli amplituda $|\hat{\mathbf{u}}|$, jest funkcją parzystą,
- **dyskretne widmo fazowe**, czyli argument $\arg(\hat{\mathbf{u}})$, jest funkcją nieparzystą.

Okresowość DTF

Wykres \hat{u} w Przykładzie 10 dla $N = 128$ i $\alpha = 15$.



Przekształcenie odwrotne

Istotnym zagadnieniem jest także rekonstrukcja sygnału (wektora) na podstawie współczynnika jego dyskretnej transformaty Fouriera.

Procedura będzie tutaj analogiczna do tej, którą znamy z klasycznej transformacji Fouriera. Zauważmy, że $k \neq \ell$ mamy

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i(\ell-k)n/N} = \frac{1 - e^{-2\pi i(\ell-k)}}{1 - e^{-2\pi i(\ell-k)/N}} = 0,$$

a gdy $k = \ell$, to

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i(\ell-k)n/N} = N,$$

Przekształcenie odwrotne

Wobec tego mamy

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \ell n/N} e^{2\pi i k n/N} = \delta_{\ell,k},$$

a stąd

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{\ell=0}^{N-1} u_{\ell} \cdot \delta_{\ell,k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} u_{\ell} e^{-2\pi i \ell n/N} e^{2\pi i k n/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}_n e^{2\pi i k n/N}. \end{aligned}$$

Przekształcenie odwrotne

Otrzymaliśmy więc gotowy wzór na **odwrotną transformatę Fouriera**.

Definicja 11.

Niech $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$. N -punktową **odwrotną dyskretną transformatą Fouriera** wektora \mathbf{v} nazywamy ciąg $\check{\mathbf{v}} = (\check{v}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dany wzorem

$$\check{v}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_n \exp\left(\mathbf{i} \frac{2kn\pi}{N}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Przekształcenie odwrotne

- Podobnie jak DFT, odwrotna transformata Fouriera również jest N -okresowa.
- Można więc traktować dyskretną transformację Fouriera jako wzajemnie jednoznaczne przekształcenia z \mathbb{C}^N w \mathbb{C}^N .
- Własności DFT odpowiadają własnościom klasycznej transformacji Fouriera.
- Dzięki temu DFT stało niezwykle popularnym narzędziem w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów – pozwala reprezentować sygnał jako ważoną sumę sinusoid o różnych częstotliwościach.

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

Przyjrzyjmy się temu, jak wygląda obliczanie DFT:

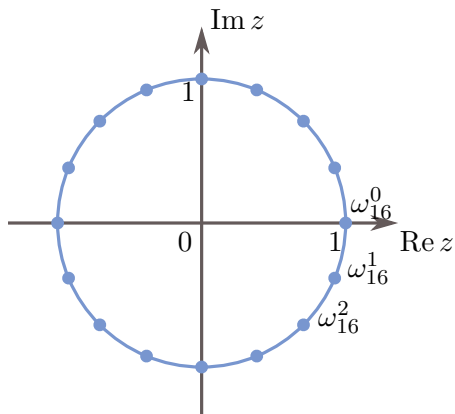
$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2\pi i k n / N}.$$

Zauważmy, że każda z N liczb $\omega_N^k = e^{-2\pi i k / N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, jest jednym z zespolonych pierwiastków N -tego stopnia z jedynki.

Wyróżnijmy $\omega_N = e^{-2\pi i / N}$, wówczas wszystkie pozostałe pierwiastki N -tego stopnia z jedynki są jej potęgami:

$$\omega_N^0, \omega_N^1, \dots, \omega_N^{N-1}.$$

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)



Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

Zauważmy, że przy takich oznaczeniach obliczenie DFT to tak naprawdę znalezienie wartości wielomianu

$$\hat{u}(x) = u_0 + u_1x + \dots + u_{N-2}x^{N-2} + u_{N-1}x^{N-1}$$

w punktach $\omega_N^0, \omega_N^1, \dots, \omega_N^{N-1}$.

Używając standardowych algorytmów (np. metody Hornera) należałoby wykonać N razy algorytm działający z szybkością $\mathcal{O}(N)$, co oznacza, że obliczanie DFT miałoby szybkość $\mathcal{O}(N^2)$. Można to jednak zrobić lepiej.

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

Dla uproszczenia będziemy zakładać, że N jest naturalną potęgą liczby 2.

Algorytm **szybkiej transformaty Fouriera** (ang. *fast Fourier transform* – FFT) wykorzystuje strategię „dziel i rządź” – zdefiniujemy dwa nowe wielomiany stopnia $\frac{N}{2} - 1$:

$$\hat{u}^{[0]}(x) = u_0 + u_2x + u_4x^2 + \dots + u_{N-2}x^{N/2-1},$$

$$\hat{u}^{[1]}(x) = u_1 + u_3x + u_5x^2 + \dots + u_{N-1}x^{N/2-1}.$$

$\hat{u}^{[0]}$ zawiera wszystkie współczynniki \hat{u} o indeksach parzystych, $\hat{u}^{[1]}$ – o indeksach nieparzystych. Wówczas

$$\hat{u}(x) = \hat{u}^{[0]}(x^2) + x\hat{u}^{[1]}(x^2).$$

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

$$\hat{u}(x) = \hat{u}^{[0]}(x^2) + x\hat{u}^{[1]}(x^2).$$

Zredukowaliśmy nasz problem do:

- obliczenia wartości dwóch wielomianów stopnia $\frac{N}{2} - 1$ w punktach

$$(\omega_N^0)^2, (\omega_N^1)^2, \dots, (\omega_N^{N-1})^2,$$

- połączenia wyników.

Czy to wciąż jest N różnych punktów?

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

Zauważmy, że zbiór punktów

$$(\omega_N^0)^2, (\omega_N^1)^2, \dots, (\omega_N^{N-1})^2,$$

nie zawiera N różnych punktów, ale $\frac{N}{2}$ zespolonych pierwiastków stopnia $\frac{N}{2}$ z jedynki.

Wobec tego zredukowaliśmy problem obliczenia wartości wielomianu stopnia N w N różnych punktach do rekurencyjnego obliczenia wartości dwóch wielomianów stopnia $\frac{N}{2}$ w $\frac{N}{2}$ punktach.

Oba problemy mają tę samą formę, ale podproblemy są dwa razy mniejsze.

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

```

1: procedure Recursive-FFT(u)
2:    $N \leftarrow \mathbf{u.length}$ 
3:   if  $N = 1$  then
4:     return u
5:   end if
6:    $\omega_N \leftarrow e^{-2\pi i/N}$ 
7:    $\omega \leftarrow 1$ 
8:    $\mathbf{u}^{[0]} \leftarrow (u_0, u_2, \dots, u_{N-2})$ 
9:    $\mathbf{u}^{[1]} \leftarrow (u_1, u_3, \dots, u_{N-1})$ 
10:   $\mathbf{y}^{[0]} \leftarrow \text{Recursive-FFT}(\mathbf{u}^{[0]})$ 
11:   $\mathbf{y}^{[1]} \leftarrow \text{Recursive-FFT}(\mathbf{u}^{[1]})$ 
12:  for  $k \leftarrow 0, N/2 - 1$  do
13:     $y_k \leftarrow y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$ 
14:     $y_{k+(N/2)} \leftarrow y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$ 
15:     $\omega \leftarrow \omega \omega_N$ 
16:  end for
17:  return y
18: end procedure

```

Można sprawdzić, że czas działania tego algorytmu to

$$T(N) = 2T(N/2) + \mathcal{O}(N) = \mathcal{O}(N \log N),$$

w porównaniu do prostej metody działającej w czasie $\mathcal{O}(N^2)$.

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

Rekurencyjny algorytm FFT działa w czasie $\mathcal{O}(N \log N)$, ale można uzyskać niższą stałą ukrytą w notacji dużego \mathcal{O} .

Zauważmy, że pętla zawarta w algorytmie wymaga obliczenia wartości $\omega y_k^{[1]}$ dwukrotnie.

```

12:   for  $k \leftarrow 0, N/2 - 1$  do
13:        $y_k \leftarrow y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$ 
14:        $y_{k+(N/2)} \leftarrow y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$ 
15:        $\omega \leftarrow \omega \omega_N$ 
16:   end for

```

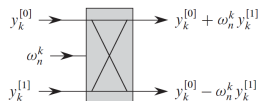
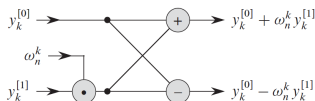
Zamiast tego, możemy tę wartość obliczyć raz, przechowując ją w pomocniczej zmiennej t .

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

```

12:  for  $k \leftarrow 0, N/2 - 1$  do
13:       $t \leftarrow \omega y_k^{[1]}$ 
14:       $y_k \leftarrow y_k^{[0]} + t$ 
15:       $y_{k+(N/2)} \leftarrow y_k^{[0]} - t$ 
16:       $\omega \leftarrow \omega \omega_N$ 
17:  end for

```



źródło: T. H. Cormen et al. *Introduction to algorithms*, 3rd ed., The MIT Press, 2009.

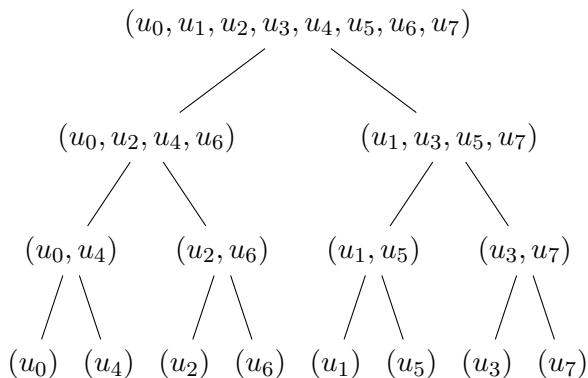
Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

Zaprezentowany algorytm jest rekurencyjny (co nie do końca nam odpowiada). Można jednak go sprowadzić do algorytmu iteracyjnego.

- 8: $\mathbf{u}^{[0]} \leftarrow (u_0, u_2, \dots, u_{N-2})$
- 9: $\mathbf{u}^{[1]} \leftarrow (u_1, u_3, \dots, u_{N-1})$
- 10: $\mathbf{y}^{[0]} \leftarrow \text{Recursive-FFT}(\mathbf{u}^{[0]})$
- 11: $\mathbf{y}^{[1]} \leftarrow \text{Recursive-FFT}(\mathbf{u}^{[1]})$

Spróbujmy zapisać wektory podawane na wejście procedury rekurencyjnej w postaci drzewa i prześledźmy jak wykonywany jest algorytm Recursive-FFT „od dołu”.

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)



Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

Wystarczy więc ustawić współrzędne wektora \mathbf{u} w odpowiedniej kolejności, a następnie:

- bierzemy pary elementów, obliczamy DFT każdej z nich używając jednej operacji „motylkowej”, zastępujemy te pary ich transformatami,
- bierzemy pary elementów w czwórki, obliczamy DFT każdej z nich używając dwóch operacji „motylkowych”, zastępujemy te czwórki ich transformatami,
- bierzemy czwórki elementów w ósemki, obliczamy DFT każdej z nich używając czterech operacji „motylkowych”, ...
- ...

Algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT)

Iteracyjny algorytm FFT wciąż działa w czasie $\mathcal{O}(N \log N)$, jednak ma jedną zasadniczą zaletę – nadaje się do zrównoleglenia. Dzięki temu stał się niezwykle popularnym narzędziem i jest zaimplementowany w każdym pakiecie do obliczeń numerycznych.

Pozostaje nam jeszcze kwestia tego, do czego nam się ten algorytm (a tak naprawdę sama transformacja) może przydać.

To się naprawdę przydaje?

Szeregi Fouriera – raz jeszcze

Rozważania na temat DFT rozpoczęliśmy od zagadnienia przybliżania współczynników d_k wykładniczego szeregu Fouriera. Wróćmy jeszcze do tego problemu.

Pokazaliśmy na początku, że

$$d_k \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \exp\left(-i \frac{2kn\pi}{N}\right)$$

dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ okresowej (o okresie T), gdzie

$$t_n \in \left[\frac{nT}{N}, \frac{(n+1)T}{N} \right], \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

To się naprawdę przydaje?

Szeregi Fouriera – raz jeszcze

Weźmy więc punkty

$$t_n = \frac{nT}{N}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

i stwórzmy wektor próbek

$$\mathbf{f} = (f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_{N-1})) \in \mathbb{C}^N.$$

Obliczając DFT wektora \mathbf{f} , tzn. $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{N-1})$, uzyskujemy przybliżenie współczynników wykładniczego szeregu Fouriera:

$$d_k \approx \frac{1}{N} \hat{f}_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

To się naprawdę przydaje?

Szeregi Fouriera – raz jeszcze

Przykład 2 (ciąg dalszy).

Wróćmy do przykładu z funkcją

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dla } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

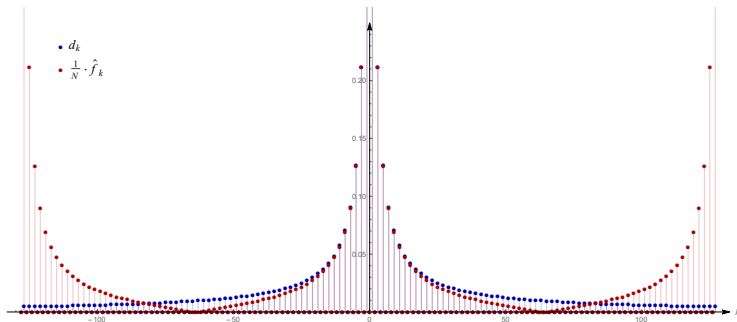
dla którego otrzymaliśmy współczynniki

$$d_0 = 0, \quad d_k = \frac{\mathbf{i}}{k\pi}((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Porównajmy je z $\frac{1}{N}\hat{f}_k$ dla $N = 128$.

To się naprawdę przydaje?

Szeregi Fouriera – raz jeszcze



To się naprawdę przydaje?

Szeregi Fouriera – raz jeszcze

Widzimy, że przybliżenie

$$d_k \approx \frac{1}{N} \hat{f}_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

ma jednak kilka ograniczeń:

- DFT jest okresowa, a współczynniki szeregu Fouriera tej własności nie mają, rozważamy tak naprawdę współczynniki dla $k \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$;
- trudno jest w ogólności znaleźć efektywne oszacowanie na k i N , które dawałoby określony błąd przybliżenia współczynników d_k ;

To się naprawdę przydaje?

Szeregi Fouriera – raz jeszcze

Widzimy, że przybliżenie

$$d_k \approx \frac{1}{N} \hat{f}_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

ma jednak kilka ograniczeń:

- mimo wszystko w wielu praktycznych zastosowaniach można przyjąć, że $|k| \leq \frac{N}{8}$.

Spróbujmy jednak spojrzeć na możliwość przybliżenia samej transformaty Fouriera.

Przybliżanie transformaty Fouriera

Rozważmy całkowaną funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ i założmy, że jej transformatę Fouriera daje się przybliżyć za pomocą całki na skończonym przedziale, tzn.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \approx \int_0^{2\pi\ell} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

(np. funkcja f ma ograniczony nośnik).

Podzielmy odcinek $[0, 2\pi\ell]$ na N podprzedziałów długości $\frac{2\pi\ell}{N}$ i wybierzmy punkty $t_n = \frac{2\pi n\ell}{N}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

To się naprawdę przydaje?

Przybliżanie transformaty Fouriera

Wówczas

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega) &\approx \int_0^{2\pi\ell} f(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &\approx \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi n\ell}{N}\right) \cdot \exp\left(-i\frac{2\omega n\ell\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{2\pi\ell}{N}\right) \\
 &= \frac{2\pi\ell}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi n\ell}{N}\right) \cdot \exp\left(-i\frac{2\omega n\ell\pi}{N}\right).
 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy niemal formułę DFT. Weźmy teraz $\omega = k/\ell$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

To się naprawdę przydaje?

Przybliżanie transformaty Fouriera

Mamy ostatecznie

$$\begin{aligned}\hat{f}\left(\frac{k}{\ell}\right) &\approx \frac{2\pi\ell}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi n\ell}{N}\right) \cdot \exp\left(-i\frac{2kn\pi}{N}\right) \\ &\approx \frac{2\pi\ell}{N} \hat{f}_k,\end{aligned}$$

gdzie $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ jest dyskretną transformatą Fouriera wektora

$$\mathbf{f} = \left(f\left(\frac{2\pi n\ell}{N}\right)_{n \in \{0,1,\dots,N-1\}} \right) \in \mathbb{C}^N.$$

Przybliżanie transformaty Fouriera

Zauważmy, że w pierwszej kolejności warto ograniczyć k do zbioru $\left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) \cap \mathbb{Z}$ (ze względu na symetrię i okresowość DFT). Otrzymujemy więc przybliżenie transformaty Fouriera na przedziale

$$\omega \in \left[-\frac{N}{2l}, \frac{N}{2l}\right).$$

W praktyce, podobnie jak przy szeregu Fouriera, warto ograniczyć się do $|k| \leq \frac{N}{8}$.

To się naprawdę przydaje?

Przybliżanie transformaty Fouriera

Przykład 11.

Rozważmy funkcję

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{dla } t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } t = 0, \\ 0, & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Można łatwo sprawdzić, że

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1 - i\omega}{1 + \omega^2}.$$

Przybliżanie transformaty Fouriera

Przykład 11.

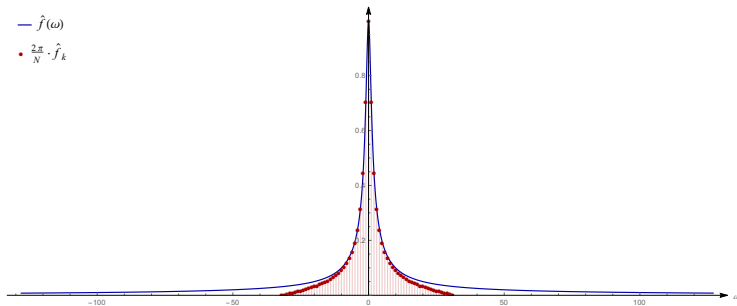
Zobaczmy jak zachowuje się DFT tej funkcji (tzn. ciągu jej punktów) dla:

- ustalonego $\ell = 1$ i różnych wartości N ,
- ustalonego $N = 2^8 = 256$ i różnych wartości ℓ .

To się naprawdę przydaje?

Przybliżanie transformaty Fouriera

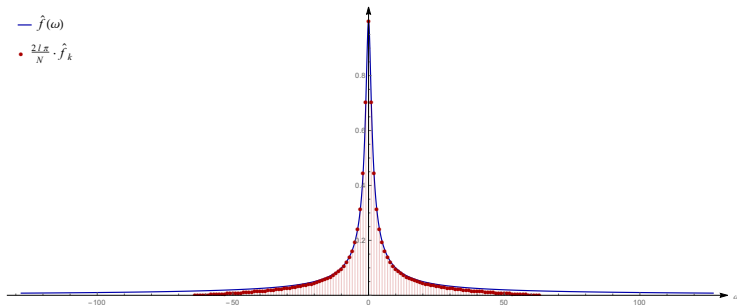
$$\ell = 1, N = 64:$$



To się naprawdę przydaje?

Przybliżanie transformaty Fouriera

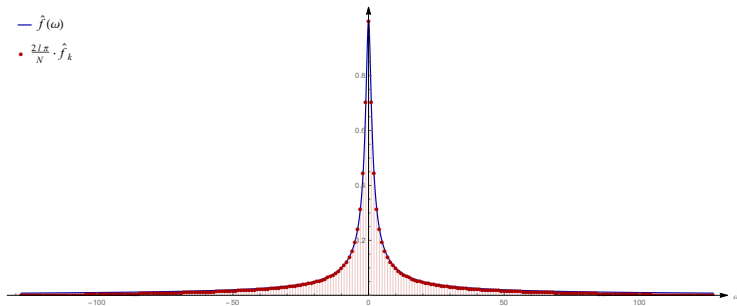
$$\ell = 1, N = 128:$$



To się naprawdę przydaje?

Przybliżanie transformaty Fouriera

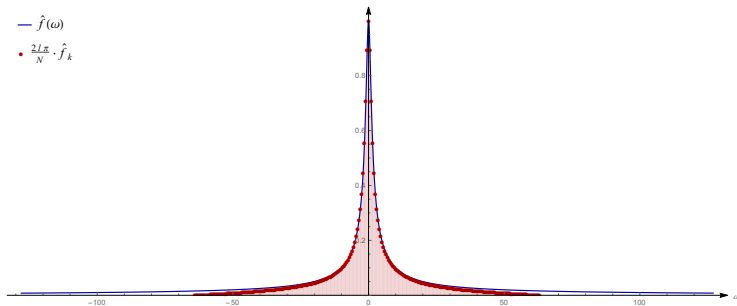
$$\ell = 1, N = 256:$$



To się naprawdę przydaje?

Przybliżanie transformaty Fouriera

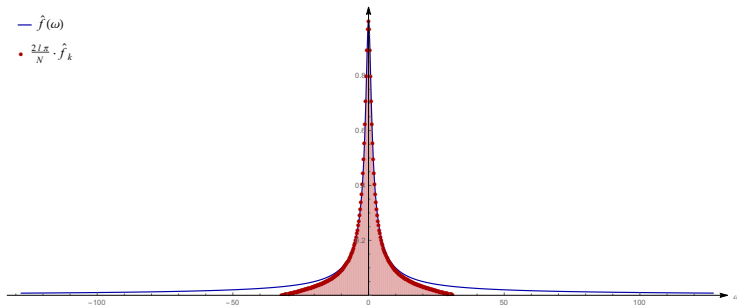
$$\ell = 2, N = 256:$$



To się naprawdę przydaje?

Przybliżanie transformaty Fouriera

$$\ell = 4, N = 256:$$



Przybliżanie transformaty Fouriera

Możemy zaobserwować następujące zjawiska:

- zwiększając N (przy ustalonym ℓ) zwiększamy zakres częstości ω , na którym przybliżana jest transformata;
- zwiększając ℓ (przy ustalonym N) zmniejszamy zakres częstości ω , na którym przybliżona jest transformata, **ale** zwiększamy jednocześnie rozdzielczość, z jaką jest przybliżana.

Przybliżanie transformaty Fouriera

Zauważmy wobec tego, że jeśli nasz sygnał (wektor) ma skończony czas trwania, to zwiększając jednocześnie ℓ (na przykład dopisując zera) oraz N możemy otrzymać przybliżenie transformaty tego sygnału w tym samym zakresie częstotliwości, ale z lepszą rozdzielczością. Jest to jeden z podstawowych (i najprostszych) zabiegów praktycznego zwiększania rozdzielczości.

Wykorzystuje się go m.in. w analizie obrazów.

Transformacje wielowymiarowe

Do tej pory rozważaliśmy jedynie sygnały jednowymiarowe – funkcje jednej zmiennej, ciągi i wektory. Dotychczas omówione pojęcia można bez problemu uogólnić na większą liczbę wymiarów, co ma znaczenie np. w analizie i przetwarzaniu obrazów.

Z matematycznego punktu widzenia obraz to dwuwymiarowa macierz $\mathbf{u} = (u_{m,n})$, $m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Na potrzeby tego wykładu ograniczymy się do obrazów w skali odcieni szarości, dla których każdy element macierzy (piksel) jest utożsamiany z jakąś liczbą rzeczywistą.

To się naprawdę przydaje?

Transformacje wielowymiarowe

Definicja 12.

Niech $\mathbf{u} = (u_{m,n}) \in \mathbb{C}^{M \times N}$. (M, N) -punktową dyskretną transformatą Fouriera macierzy \mathbf{u} nazywamy dwuwymiarowy ciąg $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ dany wzorem

$$\hat{u}_{k,\ell} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{m,n} \exp \left(-2\pi i \left(\frac{km}{M} + \frac{\ell n}{N} \right) \right), \quad (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2.$$

Transformacje wielowymiarowe

Na podstawie dotychczasowych rozważań łatwo zaobserwować pewne własności:

- 2-wymiarowa DFT jest okresowa względem każdej ze zmiennych, tzn.

$$\hat{u}_{k+M,\ell} = \hat{u}_{k,\ell}, \quad \hat{u}_{k,\ell+N} = \hat{u}_{k,\ell},$$

wystarczy więc ograniczyć wynik do macierzy $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$;

- podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, wygodnie jest umieszczać „zerową” częstotliwość (czyli $(k, \ell) = (0, 0)$) w środku macierzy;

Transformacje wielowymiarowe

Na podstawie dotychczasowych rozważań łatwo zaobserwować pewne własności:

- obliczenie 2-wymiarowej DFT oznacza tak naprawdę obliczenie 1-wymiarowych DFT w dwóch różnych kierunkach:

$$\hat{u}_{k,\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{M-1} u_{m,n} \exp \left(-2\pi i \frac{km}{M} \right) \right) \exp \left(-2\pi i \frac{\ell n}{N} \right),$$

czyli najpierw po kolumnach, a następnie po wierszach (można też odwrotnie);

- dzięki temu można wykorzystać znane algorytmy (FFT) do szybkiego obliczania transformat;

Transformacje wielowymiarowe

Na podstawie dotychczasowych rozważań łatwo zaobserwować pewne własności:

- powyższe własności pokazują też od razu, że prawdziwy jest wzór na odwrotną 2-wymiarową DFT:

$$u_{m,n} = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{u}_{k,\ell} \exp \left(2\pi i \left(\frac{km}{M} + \frac{\ell n}{N} \right) \right).$$

- w taki sam sposób można uogólnić DFT na sygnały 3-wymiarowe (element takiej „macierzy”, tzn. woksel, będzie reprezentował pewną objętość).

Transformacje wielowymiarowe

Podobnie jak w przypadku transformacji Fouriera funkcji 1 zmiennej (interpretowanej jako czas), tak i w przypadku transformacji funkcji wielu zmiennych mamy do czynienia z przekształceniem w dziedzinę częstotliwości (w przypadku 2-wymiarowym – tzw. **częstotliwości przestrzennych**).

Można wówczas interpretować obszary o stałej jasności jako obszary wolnozmiennne (o niskiej częstotliwości zmian), a krawędzie jako obszary szybkozmiennne (o dużych częstotliwościach). Zaobserwujemy to na kilku przykładach.

To się naprawdę przydaje?

Transformacje wielowymiarowe

(🗨️ animacja)

Cyfrowe przetwarzanie obrazów

Na koniec zaobserwujemy, jak przedstawione rozważania mają się do analizy i przetwarzania rzeczywistych obrazów w skali odcieni szarości.

Warto tutaj zwrócić uwagę na następujące aspekty:

- choć interpretujemy głównie widmo amplitudowe obrazów, to widmo fazowe jest równie istotnym składnikiem;
- podobnie jak w przypadku klasycznej transformacji Fouriera, dla dyskretnej wielowymiarowej transformacji Fouriera również można zastosować pojęcie **filtracji** – być może tutaj łatwiej będzie zinterpretować jak ona działa.

To się naprawdę przydaje?

Cyfrowe przetwarzanie obrazów

(🗨️ animacja)

Podsumowanie

- Transformacje Fouriera (i ich dyskretne wersje) mają szczególne znaczenie w przetwarzaniu danych rzeczywistych (dźwięków, obrazów, danych medycznych, itp.), zarówno ze względu na łatwość wykrywania pewnych cech w sygnałach, ale także możliwość kompresji.
- Podczas laboratorium spróbujemy wykorzystać omawiane metody (w szczególności dotyczące transformaty dyskretnej) do analizy i przekształcania rzeczywistych sygnałów, spojrzymy także na zagadnienie kompresowalności.

KONIEC CZĘŚCI 3