Laboratorium #1: Wprowadzenie do równań różniczkowych

Należy w każdym zadaniu wykonać jedynie podpunkt zgodny z numerem na liście obecności na zajęciach (osoby nieobecne proszone są o kontakt mailowy w celu ustalenia numeru).

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
z1.	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
z2.	(b)	(a)	(d)	(c)	(a)	(b)	(c)	(d)	(c)	(d)	(a)	(b)
z3.	(a)	(b)	(c)	(d)	(b)	(a)	(d)	(c)	(d)	(c)	(b)	(a)
z4.	(b)	(a)	(d)	(c)	(d)	(c)	(b)	(a)	(c)	(d)	(a)	(b)

Sprawozdanie należy napisać w formie sformatowanego notatnika w *Mathematice*.

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 1 punkt, za odpowiednie sformatowanie notatnika można otrzymać maksymalnie 2 punkty. Ostatnie zadanie jest (nieobowiązkowym) zadaniem dodatkowym i można za nie otrzymać dodatkowy 1 punkt.

Termin oddania: 17 października, godz. 9:59.

Przydatne funkcje: `DSolve`, `NDSolve`, `ContourPlot`, `VectorPlot`, `StreamPlot` (i inne).

Zadanie 1. Wyznacz równanie różniczkowe pierwszego rzędu opisujące rodzinę linii

$$x^3y - B \cdot Cy^2 = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

gdzie

(**a**) $B = 1$, (**b**) $B = -1$, (**c**) $B = 2$, (**d**) $B = -2$.

Narysuj te krzywe (dla kilku wartości stałej C). Czy rozwiązanie równania dla dowolnego warunku początkowego jest jednoznaczne?

Uwaga: należy znaleźć <u>jedno</u> równanie (niezależne od stałej C), które opisuje całą rodzinę linii.

Zadanie 2. Narysuj pole wektorowe związane z podanym równaniem różniczkowym. Następnie rozwiąż (analitycznie lub numerycznie) zagadnienia z odpowiednimi warunkami początkowymi i nanieś rozwiązania na otrzymany wykres:

(a) $2(x + x') = t + 3$, $\quad x(0) = 0$, $x(0) = 1$, $x(0) = 2$,

(b) $xx' + t = 0$, $\quad x(0) = -10$, $x(0) = 1$, $x(0) = 10$,

(c) $(x^2 + 1)x' = x - t$, $\quad x(0) = -1$, $x(0) = 0$, $x(0) = 1$,

(d) $x' + 1 = \frac{1}{2}(x^2 + t^2)$, $\quad x(0) = -1$, $x(0) = 0$, $x(0) = 1$.

Zadanie 3. Wykaż, że podane równanie różniczkowe jest zupełne, a następnie wyznacz funkcję potencjału. Narysuj pole wektorowe związane z tym równaniem i nanieś na nie kilka krzywych całkowych tego równania.

(a) $(3t^2 + y^2)\,\mathrm{d}t + (2ty + 1)\,\mathrm{d}y = 0$,

(b) $ye^t(t + 1)\,\mathrm{d}t + te^t\,\mathrm{d}y = 0$,

(c) $(2ty + 1)\,\mathrm{d}t + (t^2 - 2y)\,\mathrm{d}y = 0$,

(d) $(y\cos(ty) + 1)\,\mathrm{d}t + (t\cos(ty) - 2y)\,\mathrm{d}y = 0$.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie ogólne podanego równania drugiego rzędu. Otrzymany wynik jest warstwą dwuwymiarowej podprzestrzeni liniowej rozpiętej na dwóch wektorach bazowych (dlaczego?), tzn. $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + x_s(t)$. Narysuj (na jednym wykresie) rozwiązania dla różnych wartości C_1 i $C_2 = 0$ oraz (na drugim wykresie) dla różnych wartości C_2 i $C_1 = 0$.

(a) $x'' + x = 2(1 - t)$,

(b) $x'' - 6x' + 9x = 9t^2 - 12t + 2$,

(c) $x'' + 6x' + 9x = 10\sin t$,

(d) $x'' + x' = e^{-t}$.

Zadanie dodatkowe. Wyznacz wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których podana funkcja będzie rozwiązaniem wskazanego równania, a następnie rozwiąż te równania:

(a) funkcja: $\varphi(t) = e^{mt}$, równanie: $(2t + 1)x'' + 2(2t - 1)x' - 8x = 0$,

(b) funkcja: $\varphi(t) = t^m$, równanie: $t^2x'' - 3tx' + 4x = 0$.