

Laboratorium #2: Układy równań różniczkowych

Należy w każdym zadaniu wykonać jedynie podpunkt zgodny z numerem na liście obecności na zajęciach (osoby nieobecne proszone są o kontakt mailowy w celu ustalenia numeru).

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| z1. | (a) | (b) | (c) | (d) | (a) | (b) | (c) | (d) | (a) | (b) | (c) | (d) |
| z2. | (b) | (a) | (d) | (c) | (a) | (b) | (c) | (d) | (c) | (d) | (a) | (b) |
| z3. | (a) | (b) | (c) | (d) | (b) | (a) | (d) | (c) | (d) | (c) | (b) | (a) |
| z4. | (b) | (a) | (d) | (c) | (d) | (c) | (b) | (a) | (c) | (d) | (a) | (b) |

Sprawozdanie należy napisać w formie sformatowanego notatnika w *Mathematica*.

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 1 punkt, za odpowiednie sformatowanie notatnika można otrzymać maksymalnie 2 punkty.

Termin oddania: 24 października, godz. 9:59.

Przydatne funkcje: DSolve, NDSolve, StreamPlot, Eigensystem, MatrixExp (i inne).

Zadanie 1. Zapisz podane równanie różniczkowe jako układ równań pierwszego rzędu. Następnie rozwiąż otrzymany układ i narysuj wykresy (używając funkcji Plot, a na osobnym rysunku zamieść wykres parametryczny – funkcja ParametricPlot – na tle portretu fazowego – funkcja StreamPlot).

(a) $x'' + x' + 8x = -1, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0;$

(b) $x'' + 2x' + 7x = 1, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0;$

(c) $x'' + x' + 9x = 8, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0;$

(d) $x'' + 3x' + 7x = 3, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$

Zadanie 2. Znajdź punkty równowagi podanego układu równań różniczkowych (rozwiąż odpowiedni układ równań – funkcja `Solve`). Następnie dla dwóch punktów równowagi (znajdujących się na osiach układu współrzędnych) dobierz nietrywialny warunek początkowy tak, by rozwiązanie układu równań różniczkowych (przy danych warunkach) zbiegało do tych punktów (wykorzystaj funkcję `NDSolve`). Nanieś wykresy uzyskanych rozwiązań na portret fazowy układu.

(a) $x' = 3x - x^2 - xy, \quad y' = 4y - y^2 - 4xy;$

(b) $x' = 4x - x^2 - 4xy, \quad y' = 3y - y^2 - xy;$

(c) $x' = 2x - x^2 - 3xy, \quad y' = 3y - y^2 - 2xy;$

(d) $x' = x - x^2 - xy, \quad y' = 4y - y^2 - 5xy;$

Zadanie 3. Znajdź macierz fundamentalną podanego układu równań różniczkowych, a następnie (używając tej macierzy i rozwiązując odpowiedni układ równań) znajdź rozwiązania zagadnienia początkowego dla podanych warunków początkowych. (Możesz sprawdzić czy wynik jest poprawny, np. używając funkcji `DSolve`.)

(a) $x' = -3x + 3y, \quad y' = -2x + 2y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1;$

(b) $x' = x - 5y, \quad y' = 4y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -1;$

(c) $x' = 3x, \quad y' = -3x - 4y, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1;$

(d) $x' = -5x - 3y, \quad y' = 2x + 2y, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 0.$

Zadanie 4. Dla podanej macierzy \mathbf{A} znajdź macierz $e^{\mathbf{A}t}$. Porównaj następnie otrzymany wynik z przybliżeniem uzyskanym przez wysumowanie kilku (-nastu?) pierwszych wyrazów rozwinięcia $e^{\mathbf{A}t}$ w szereg Taylora (np. umieszczając funkcje znajdujące się w poszczególnych komórkach macierzy na wykresach).

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix};$

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix};$

(d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$