Laboratorium #10: Równanie wiszącej liny

Rozważamy zagadnienie początkowo-brzegowe opisujące zachowanie liny o długości L przyczepionej do sufitu (za sufit przyjmujemy punkt $x = L$) i zwisającej swobodnie:

$$\begin{aligned} & u_{tt} = g(xu_x)_x - \nu u_t, & & x \in (0, L),\ t > 0, \\ u(0, x) = v_0(x), \quad & u_t(0, x) = v_1(x), & & x \in [0, L], \\ u(t, L) = 0, \quad & u(t, 0) < \infty, & & t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Parametr ν jest współczynnikiem tłumienia i wynika z obecności oporów powietrza. Przyjmujemy $L = 2$ oraz $g = 9{,}81$.

Rozważamy, podobnie jak na wcześniejszych zajęciach, centralną siatkę przestrzenną x_m, $m = 1, \ldots, M$ (z *punktami widmowymi* po lewej i prawej stronie, ozn. x_0 i x_{M+1}) oraz klasyczną siatkę czasową t_n, $n = 1, \ldots, N$. Na zajęciach wyprowadziliśmy schemat różnicowy rozwiązujący podane zagadnienie:

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} = g \cdot \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + g \cdot x_m \cdot \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \nu \cdot \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k},$$

z którego możemy skorzystać dla $m = 2, \ldots, M - 1$, $n = 2, \ldots, N - 1$. Tak jak poprzednio, schemat nie pozwala nam na znalezienie wartości rozwiązania na pierwszych dwóch poziomach czasowych, a także na lewym i prawym brzegu. Postępujemy analogicznie:

(**a**) wartości u_m^1 znajdujemy bezpośrednio z danego warunku początkowego v_0;

(**b**) u_m^2 otrzymamy przybliżając warunek początkowy v_1, tzn. $v_1(x_m) \approx \frac{u_m^2 - u_m^0}{2k}$, i wstawiając otrzymane u_m^0 do głównego schematu dla $n = 1$;

(**c**) na lewym brzegu musimy wykorzystać numeryczny warunek brzegowy $u_0^n = 2u_1^n - u_2^n$ i wstawić otrzymaną *wartość widmową* u_0^n do głównego schematu dla $m = 1$;

(**d**) z prawej strony korzystamy z zerowego warunku brzegowego przybliżając $\frac{u_M^n + u_{M+1}^n}{2} \approx 0$ i wstawiając otrzymaną *wartość widmową* u_{M+1}^n do głównego schematu dla $m = M$.

Zadanie polega na zaimplementowaniu funkcji `HangingChain` tak, by można było rozwiązać podane zagadnienie dla dowolnych parametrów g oraz $\nu > 0$. Nagłówek funkcji powinien mieć postać

```
function [u, X, T, M, N] = HangingChain(g, nu, v0, v1, t, x, lambda, h),
```

gdzie oznaczenia `t`, `x`, `lambda` oraz `h` są takie jak wcześniej. Jako *szkielet* można wykorzystać funkcję `WaveEquation1D` z wcześniejszych zajęć.

Uzyskane rozwiązania można porównać z rozwiązaniem „analitycznym" (tzn. z pewnym przybliżeniem uzyskanym za pomocą pierwszych kilkudziesięciu wyrazów odpowiedniego szeregu) zaimplementowanym w formie funkcji `HangingChainBessel` (dostępnej na stronie). Aby to zrobić, zbadaj rozwiązania uzyskane za pomocą zaimplementowanej funkcji dla następujących danych:

$$v_0(x) = \frac{1}{4}(x - L)^2, \qquad v_1(x) = 0,$$

oraz dla różnych wartości $\nu > 0$. Przyjmij następujące parametry obliczeń:

$$h = \frac{1}{200}, \quad \lambda = \frac{1}{10}$$

i rozwiąż równanie w przedziale $t \in [0, T]$ dobranym tak, by można było zaobserwować kilka pełnych „wahnięć".

Pracę domową należy oddać w formie spakowanego katalogu `.zip` zawierającego tylko dwa M-pliki – plik funkcji `HangingChain.m` oraz plik skryptu `lab10.m`, w którym będzie zawarty kod do przeprowadzenia testów i wyświetlenia wykresów.

Termin oddania: 16 stycznia, godz. 9:59.

Przydatne funkcje: `for end`, `plot`, `surf` (i inne).