

Laboratorium #11: Układ równań płytkiej wody

Rozważamy układ równań różniczkowych cząstkowych opisujący zachowanie powierzchni wody w przekroju płytkiego kanału (o idealnie poziomym dnie):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} (uv) = 0, & x \in (-L, L), \\ \frac{\partial}{\partial t} (uv) + \frac{\partial}{\partial x} \left(uv^2 + \frac{1}{2} g u^2 \right) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

gdzie funkcja $u = u(t, x)$ opisuje wysokość powierzchni wody nad dnem kanału, a funkcja $v = v(t, x)$ opisuje prędkość powierzchni wody. Zadane są ponadto warunki początkowe $u(0, x) = u_0(x)$, $v(0, x) = v_0(x)$ oraz warunki brzegowe typu Dirichleta.

Na zajęciach wyprowadziliśmy układ równań dla schematu różnicowego rozwiązującego powyższy układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} - u_m^n + \frac{\lambda}{2} u_m^n (v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}) + \frac{\lambda}{2} v_m^n (u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) &= 0, & m = 2, \dots, M-1, \\ v_m^{n+1} - v_m^n + \frac{\lambda}{2} v_m^n (v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}) + \frac{\lambda}{2} g (u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) &= 0, & m = 2, \dots, M-1, \end{aligned}$$

gdzie $\lambda = \frac{k}{h}$. Jest to układ równań zawierający $2M$ niewiadomych i składający się z $2M - 4$ równań. Brakujące 4 równania wynikają z warunków brzegowych. Stosujemy klasyczną siatkę przestrzenną (odległość między punktami h) oraz czasową (odległość między punktami k).

Zadanie polega na napisaniu funkcji

```
function [u, v, X, T, M, N] = ...
    ShallowWaterSystem(g, u0, uL, uR, v0, vL, vR, t, x, lambda, h)
```

która będzie rozwiązywała dany problem. Pracę domową należy oddać w formie pojedynczego M-pliku – pliku funkcji `ShallowWaterSystem.m`. Na stronie internetowej znajduje się szkielec funkcji, którą należy napisać (wystarczy go odpowiednio uzupełnić) oraz plik skryptu `lab12.m`, który zawiera kod przydatny przy sprawdzaniu działania funkcji (nie należy wysyłać mailem tego pliku).

Uwaga. Warto pamiętać, że dla parametrów $h = 0.01$, $\lambda = 0.2$ oraz $L = 5$ i $t \in [0, 3]$ mamy do rozwiązania 1501 układów równań o 1001 niewiadomych – rozwiązanie go może MATLABowi zająć chwilę.

Termin oddania: 23 stycznia, godz. 9:59.

Przydatne funkcje: lewe dzielenie macierzy $A \setminus b$, `for end`, `plot` (i inne).