

Metody komputerowe w równaniach różniczkowych

część 2: Równania różniczkowe cząstkowe – hiperboliczne i paraboliczne

dr inż. Łukasz Błaszczyk

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska

rok akademicki 2018/2019 (semestr zimowy)

Co już wiemy?

Na *Równaniach różniczkowych cząstkowych*:

- istnienie i jednoznaczność rozwiązań prostych typów równań,
- metody rozwiązywania niektórych prostych typów równań.

W przypadku równań cząstkowych sytuacja jest jeszcze trudniejsza, niż dla równań zwyczajnych. Nie tylko nie da się (najczęściej) zapisać rozwiązania za pomocą znanych funkcji, ale często trzeba zmienić definicję *rozwiązania równania*, tak żeby miało to sens fizyczny (rozwiązania *słabe*, *dystrybucyjne*, itp.).

Problemy z definicją rozwiązania...

Przykład 1 (skalarne prawa zachowania – równanie Burgersa).

Na *RRC* próbowaliśmy podejść do zagadnienia związanego ze skalarными prawami zachowania:

$$\begin{aligned}
 u_t + (f(u))_x &= 0 && \text{dla } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\
 u(0, x) &= u_0(x) && \text{dla } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

W naszym przypadku $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, a u_0 była funkcją ciągłą (zadaną przedziałami).

Problemy z definicją rozwiązania...

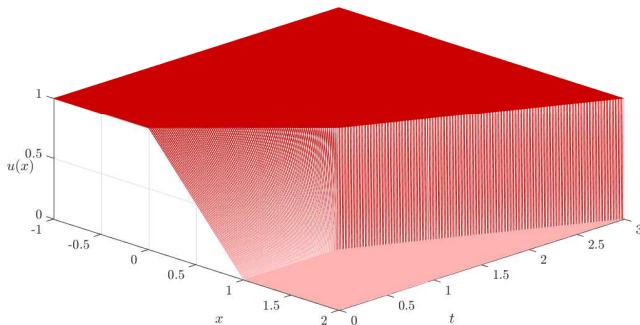
Przykład 1 (skalarne prawa zachowania – równanie Burgersa).

Problemy:

- warunek początkowy nie jest różniczkowalny w dwóch punktach (niewielki problem),
- metoda charakterystyk działa tylko dla $t < 1$ (większy problem),
- jaką definicję rozwiązania dla $t \geq 1$ wybrać?

Problemy z definicją rozwiązania...

Przykład 1 (skalarne prawa zachowania – równanie Burgersa).



... szybko rosną do sporych rozmiarów

Przykład 2.

Równanie Burgera to *bardzo uproszczona* wersja układu równań Naviera-Stokesa:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f},$$

dla którego problemy pojawiają się już przy definiowaniu czym jest rozwiązanie takiego układu...

Nie bez powodu jest to przedmiot jednego z problemów milenijnych.
;-)

Czym się zajmiemy?

- Na klasycznym kursie *Równań różniczkowych cząstkowych* zajmowaliśmy się trzema typami równań liniowych: eliptycznymi, parabolicznymi i hiperbolicznymi.
- Zaczniemy od równań **hiperbolicznych** i **parabolicznych**.
- Na koniec powiemy kilka słów o równaniach **eliptycznych**.

Zagadnienia pierwszego rzędu

Założmy, że chcemy rozwiązać numerycznie następujące zagadnienie:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(t, x) &= f(t, x) && \text{dla } t > 0, x \in I, \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{dla } x \in I, \end{aligned}$$

gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_t, \partial_x)$ jest liniowym operatorem różniczkowym zawierającym tylko pierwszą pochodną cząstkową względem czasu t .

Zagadnienia pierwszego rzędu

Przykład 3 (podstawowe zagadnienia).

$$u_t + au_x = 0 \quad (\text{równanie transportu}),$$

$$u_t + au_x - bu_{xx} = 0 \quad (\text{równanie prz. ciepła z zaburzeniem } au_x \\ \text{– równanie konwekcji-dyfuzji}),$$

$$u_t + bu_{xxxx} = 0 \quad (\text{równanie drgań belki}).$$

Dla uproszczenia zajmiemy się zagadnieniami określonymi **na całej prostej** – w ten sposób ominiemy problemy związane z warunkami brzegowymi.

Różnice skończone – podstawowe przykłady

Schemat postępowania będzie podobny jak w przypadku liniowych metod wielokrokowych dla równań różniczkowych zwyczajnych:

- niech $h, k \in \mathbb{R}_+$;
- stworzymy sieć punktów (węzłów) $(t_n, x_m) = (nk, mh)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$;
- jeśli funkcja u jest zdefiniowana na węzłach sieci, to jej wartość w węźle (t_n, x_m) będziemy pisać w skrócie jako u_m^n ;
- przez u^n będziemy oznaczać funkcję określoną na siatce na ustalonym n -tym poziomie czasowym.

Różnice skończone – podstawowe przykłady

Będziemy zajmować się **schematami różnicowymi**. Główną ideą tej metody jest zastąpienie operacji różniczkowania różnicami skończonymi, korzystając m.in. z faktu, że dla u klasy C^1 mamy

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t, x)}{\varepsilon},$$

czy

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t - \varepsilon, x)}{2\varepsilon}$$

i podobnie dla pochodnych przestrzennych (znów głównym narzędziem będzie Twierdzenie Taylora).

Różnice skończone – podstawowe przykłady

Przykład 4.

Schematy różnicowe najczęściej spotykane dla jednorodnego równania transportu:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0 \quad (\text{forward-time forward-space}),$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (\text{forward-time backward-space}),$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (\text{forward-time central-space}),$$

$$\frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{k} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (\text{Lax-Friedrichs}).$$

Różnice skończone – podstawowe przykłady

Przykład 4.

Wszystkie te schematy są jednokrokowe i jawne, tzn. wartości na $(n + 1)$ -szym poziomie czasowym, czyli dla $t = (n + 1)k$, są jawnie wyliczalne z wartości funkcji na n -tym poziomie, np. dla pierwszego schematu:

$$u_m^{n+1} = (1 + a\lambda)u_m^n - a\lambda u_{m+1}^n, \quad \text{gdzie } \lambda = \frac{k}{h}.$$

Podobnie dla pozostałych schematów u_m^{n+1} jest kombinacją liniową wartości z n -tego poziomu czasowego.

Różnice skończone – podstawowe przykłady

Przykład 5.

Przykłady schematów różnicowych stosowanych w niejednorodnym równaniu przewodnictwa ciepła $u_t = bu_{xx} + f$,

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = b \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f_m^n \quad (\text{forward-time central-space}),$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} = b \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f_m^n \quad (\text{leapfrog}),$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = \frac{b}{2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \frac{1}{2}(f_m^{n+1} + f_m^n)$$

(Crank-Nicolson).

Różnice skończone – podstawowe przykłady

Przykład 5.

- Pierwszy i trzeci schemat są schematami jednokrokowymi – wystarczy tylko wartości początkowe $u|_{t=0}$ aby otrzymać wartości funkcji w punktach siatki.
- Drugi schemat jest dwukrokowy – w schematach k -krokowych potrzebna jest procedura początkowa, tzn. taki pomocniczy schemat różnicowy, który da nam wartości na $(k - 1)$ poziomach czasowych.
- Pierwsze dwa schematy są jawne, trzeci – niejawny, tzn. wartości na $(n + 1)$ -szym poziomie czasowym trzeba jeszcze wyznaczyć z pewnego układu równań.

Co to znaczy *dobry schemat*?

- Robiąc proste testy można łatwo sprawdzić, że niektóre ze schematów są bezużyteczne... w niektórych przypadkach.
- Pojęcia, które pozwalają ocenić jakość metody są bardzo podobne do tych, które znamy z równań zwyczajnych.
- Uzyskamy dzięki nim warunki zbieżności analogiczne do tych, które pojawiły się w poprzedniej części wykładu.

Co to znaczy *dobry schemat*?

Przykład 6.

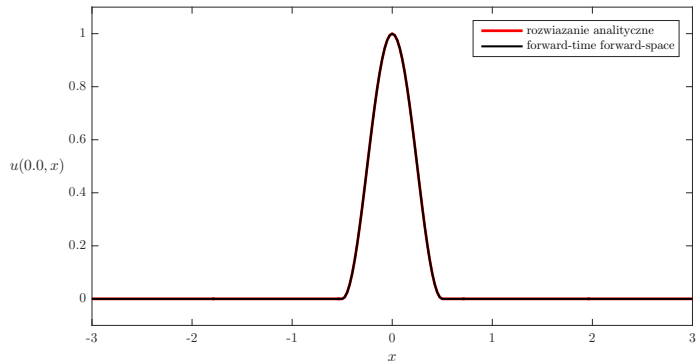
Zastosujmy schemat *forward-time forward-space* do równania

$$u_t - u_x = 0$$

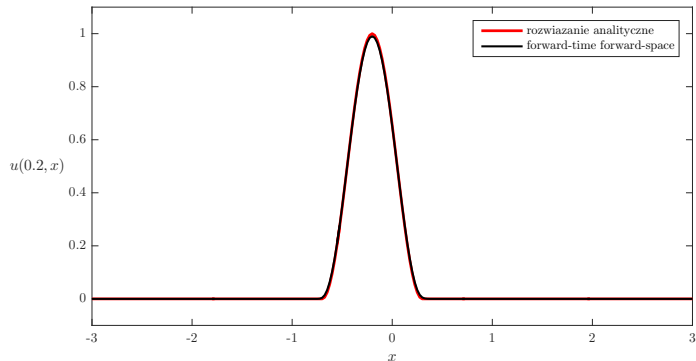
z odpowiednim warunkiem początkowym.

Parametry metody: $h = \frac{1}{40}$, $k = \frac{1}{32}$.

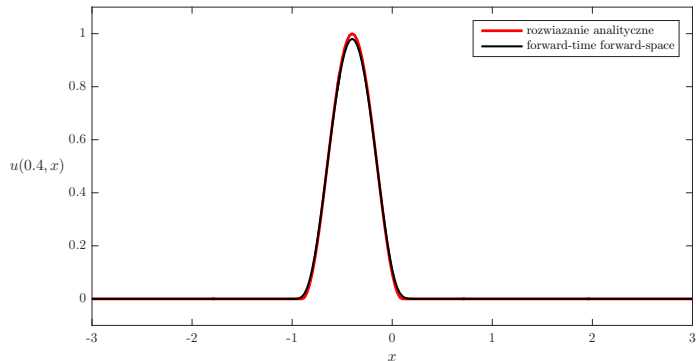
Co to znaczy *dobry* schemat?



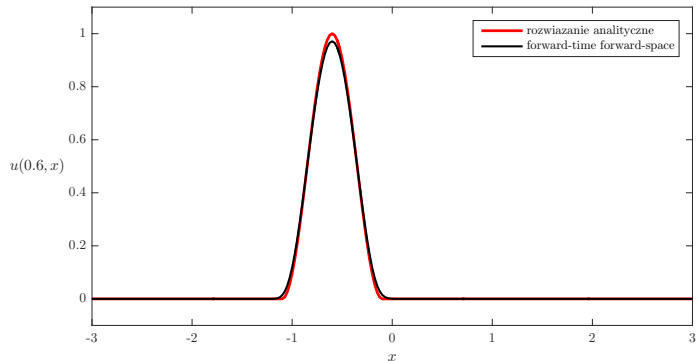
Co to znaczy *dobry* schemat?



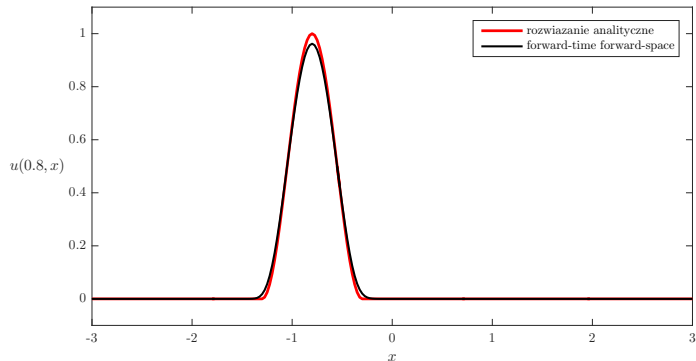
Co to znaczy *dobry* schemat?



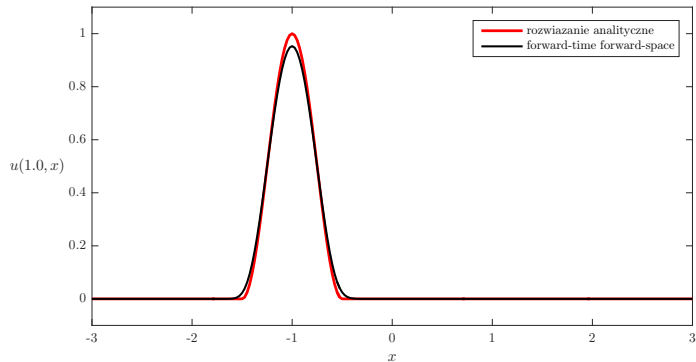
Co to znaczy *dobry* schemat?



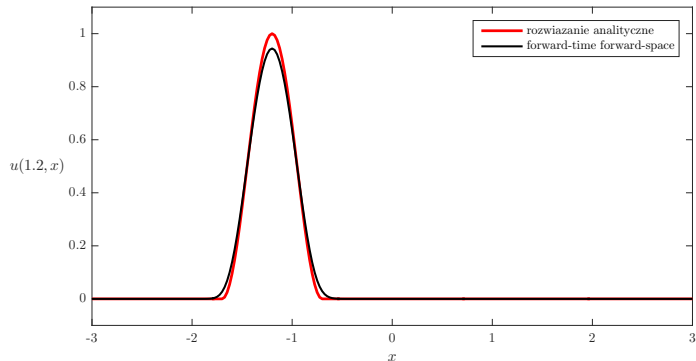
Co to znaczy *dobry* schemat?



Co to znaczy *dobry* schemat?



Co to znaczy *dobry schemat*?



Co to znaczy *dobry schemat*?

Przykład 6.

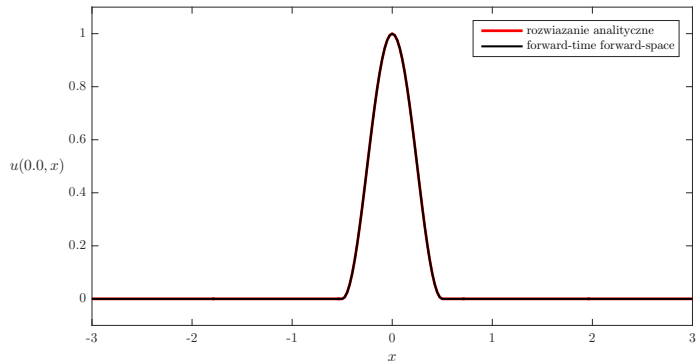
Użyjmy teraz tej samej metody (*forward-time forward-space*) do nieco innego równania:

$$u_t + u_x = 0$$

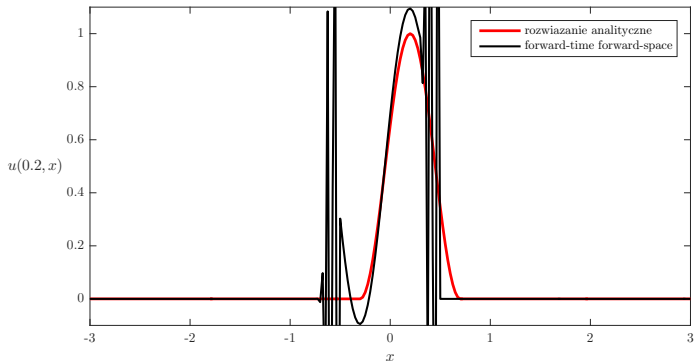
z odpowiednim warunkiem początkowym.

Parametry metody: $h = \frac{1}{40}$, $k = \frac{1}{32}$.

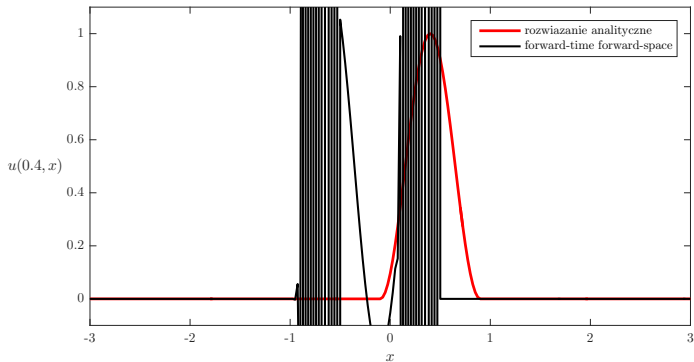
Co to znaczy *dobry* schemat?



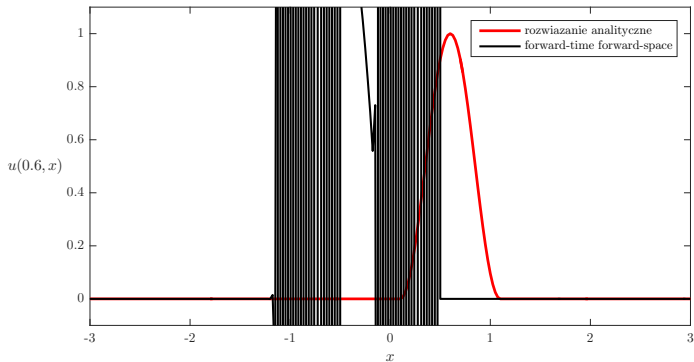
Co to znaczy *dobry* schemat?



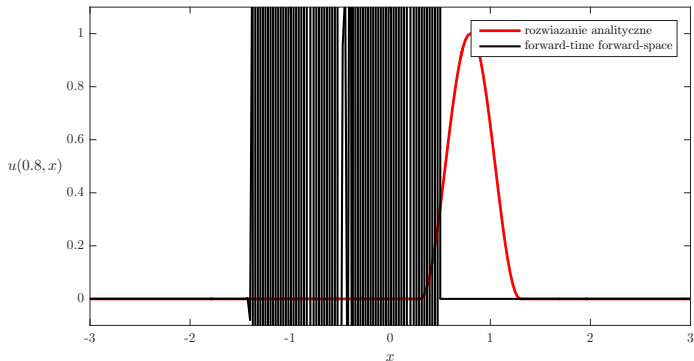
Co to znaczy *dobry schemat*?



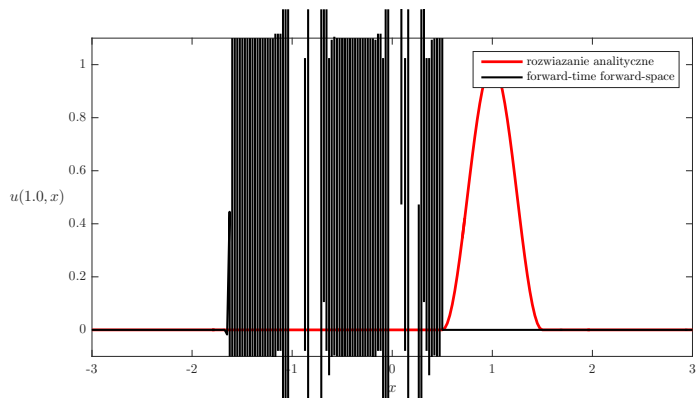
Co to znaczy *dobry schemat*?



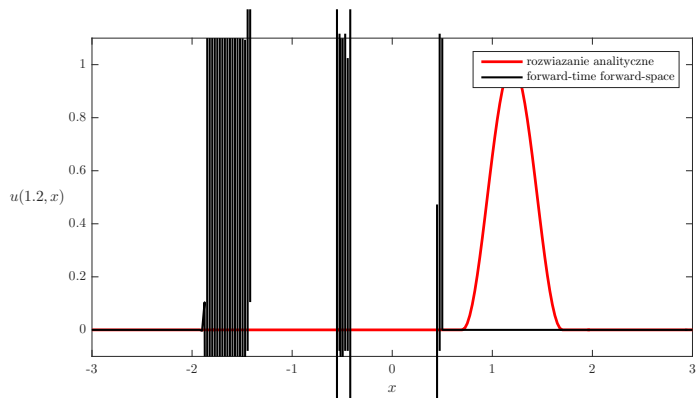
Co to znaczy *dobry* schemat?



Co to znaczy *dobry schemat*?



Co to znaczy *dobry* schemat?



Co to znaczy *dobry schemat*?

- Robiąc proste testy można łatwo sprawdzić, że niektóre ze schematów są bezużyteczne... w niektórych przypadkach.
- Pojęcia, które pozwalają ocenić jakość metody są bardzo podobne do tych, które znamy z równań zwyczajnych.
- Uzyskamy dzięki nim warunki zbieżności analogiczne do tych, które pojawiły się w poprzedniej części wykładu.

Oznaczenia

Przypomnijmy, że zajmujemy się zagadnieniem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(t, x) &= f(t, x) && \text{dla } t > 0, x \in \mathbb{R}, && (\star) \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{dla } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_t, \partial_x)$ jest liniowym operatorem różniczkowym zawierającym tylko pierwszą pochodną cząstkową względem czasu t .

Rozważamy (jednokrokowe) schematy różnicowe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,h} u_m^n &= \mathcal{R}_{k,h} f(t_n, x_m) && \text{dla } n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{Z}, && (\Delta) \\ u_m^0 &= \mathcal{L}_h^0 u_0(x_m) && \text{dla } m \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{L}_{k,h}$, $\mathcal{R}_{k,h}$ i \mathcal{L}_h^0 są operatorami różnicowymi przybliżającymi operatory różniczkowy \mathcal{L} i identyfikację.

Klasyczne pojęcia w nowym wydaniu

Definicja 1.

Jednokrokowy schemat różnicowy (Δ) przybliżający równanie różniczkowe cząstkowe (\star) nazywamy **zbieżnym**, jeśli dla dowolnego rozwiązania u równania różniczkowego (\star) i rozwiązania u_m^n schematu (Δ) takiego, że u_m^0 zbiega do $u_0(x)$ gdy $mh \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} x$, rozwiązanie u_m^n zbiega do $u(t, x)$ gdy $(nk, mh) \xrightarrow{k, h \rightarrow 0^+} (t, x)$.

- Ta definicja jest (co najmniej) skomplikowana i niewiele mówi.

Mało precyzyjna definicja

- O jaki rodzaj zbieżności chodzi? Punktową, w normie?
- Czy k i h zbiegają niezależnie do 0, czy są powiązane?
- *Inaczej*: metoda jest zbieżna, jeżeli rozwiązania schematu zbiegają do rozwiązania równania przy założeniu, że dane początkowe schematu zbiegają do danych początkowych zagadnienia.
- Definicję łatwo uogólnić na schematy wielokrokowe – musimy mieć metodę zbieżną dla pierwszych kroków.
- Brakujące szczegóły będziemy doprecyzowywać później.

Znajome pojęcie – zgodność

Definicja 2.

Mówimy, że schemat różnicowy $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = \mathcal{R}_{k,h}f(t_n, x_m)$ przybliżający równanie różniczkowe cząstkowe $\mathcal{L}u = f$ jest **zgodny** z równaniem różniczkowym, jeśli dla dowolnej gładkiej funkcji ϕ i dla dowolnego punktu (t_n, x_m) na siatce zachodzi

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) - \mathcal{R}_{k,h}\mathcal{L}\phi(t_n, x_m) \rightarrow 0 \quad \text{gdy } k, h \rightarrow 0^+.$$

Uwaga 1: nie precyzujemy tutaj charakteru zbieżności $k, h \rightarrow 0^+$.

Uwaga 2: w przypadku równań jednorodnych przyjmujemy, że $\mathcal{R}_{k,h}v_m^n = v_m^n$.

Przykłady metod zgodnych #1

Przykład 7.

Rozważmy równanie transportu, tzn. $u_t + au_x = 0$, dla którego:

$$\mathcal{L}\phi(t, x) = \phi_t(t, x) + a\phi_x(t, x).$$

Zajmijmy się schematem różnicowym *forward-time forward-space*, wówczas operator różnicowy ma postać

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) = \frac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^n}{k} + a \frac{\phi_{m+1}^n - \phi_m^n}{h},$$

gdzie $\phi_m^n = \phi(t_n, x_m)$.

Przykłady metod zgodnych #1

Przykład 7.

Ze wzoru Taylora dla ϕ względem t oraz x w punkcie (t_n, x_m) dostajemy:

$$\begin{aligned}\phi_m^{n+1} &= \phi_m^n + k\phi_t(t_n, x_m) + \mathcal{O}(k^2), \\ \phi_{m+1}^n &= \phi_m^n + h\phi_x(t_n, x_m) + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Przykłady metod zgodnych #1

Przykład 7.

Wówczas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) &= \frac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^n}{k} + a \frac{\phi_{m+1}^n - \phi_m^n}{h} \\ &= \phi_t(t_n, x_m) + a\phi_x(t_n, x_m) + \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(h), \end{aligned}$$

a zatem

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) - \mathcal{L}\phi(t_n, x_m) = \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(h) \xrightarrow{k,h \rightarrow 0^+} 0,$$

czyli schemat różnicowy jest zgodny z równaniem.

Przykłady metod zgodnych #2

Przykład 8.

Rozważmy teraz (znów dla jednorodnego równania transportu) schemat *Laxa-Friedrichsa*:

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) = \frac{\phi_m^{n+1} - \frac{1}{2}(\phi_{m+1}^n + \phi_{m-1}^n)}{k} + a \frac{\phi_{m+1}^n - \phi_{m-1}^n}{2h}.$$

Pytanie: dlaczego taka dziwna zmiana w pierwszym wyrazie?

Przykłady metod zgodnych #2

Przykład 8.

Tak jak wcześniej, skorzystamy ze wzoru Taylora:

$$\phi_m^{n+1} = \phi_m^n + k\phi_t(t_n, x_m) + \mathcal{O}(k^2),$$

$$\phi_{m\pm 1}^n = \phi_m^n \pm h\phi_x(t_n, x_m) + \frac{1}{2}h^2\phi_{xx}(t_n, x_m) + \mathcal{O}(h^3)$$

Przykłady metod zgodnych #2

Przykład 8.

Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\phi_{m+1}^n + \phi_{m-1}^n) &= \phi_m^n + \frac{1}{2}h^2\phi_{xx}(t_n, x_m) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= \phi_m^n + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

oraz

$$\frac{1}{2h}(\phi_{m+1}^n - \phi_{m-1}^n) = \phi_x(t_n, x_m) + \mathcal{O}(h^2).$$

Przykłady metod zgodnych #2

Przykład 8.

Wstawiając te wyrażenia do schematu różnicowego otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) &= \frac{\phi_m^{n+1} - \frac{1}{2}(\phi_{m+1}^n + \phi_{m-1}^n)}{k} + a \frac{\phi_{m+1}^n - \phi_{m-1}^n}{2h} \\ &= \phi_t(t_n, x_m) + a\phi_x(t_n, x_m) \\ &\quad + \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(k^{-1}h^2) + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Zatem $\mathcal{L}_{k,h}\phi - \mathcal{L}\phi \rightarrow 0$ gdy $h, k \rightarrow 0^+$, o ile $k^{-1}h^2 \rightarrow 0^+$.

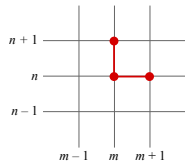
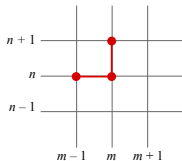
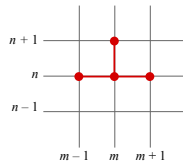
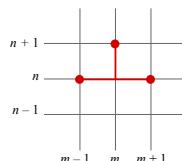
Schemat jest więc zgodny, ale ostatnia zbieżność mówi nam, że wybór k i h nie może być dowolny.

Pieniądze Zgodność to nie wszystko

- Dowiedliśmy, że schemat *forward-time forward-space* jest zgodny, jednak Przykład 6 wyraźnie pokazał, że dla $a = 1$ schemat ten nie jest użyteczny.
- Można pokazać, że dla dowolnego $a > 0$ ten schemat nie będzie działał prawidłowo. Podobnie, dla $a < 0$ nie będzie dobry schemat *forward-time backward-space*.
- Widzimy, że tak jak w przypadku liniowych metod wielokrotnych dla równań zwyczajnych, tak i tutaj zgodność nie jest warunkiem wystarczającym.

Czy można od razu zauważyć, że jakiś schemat nie zadziała?

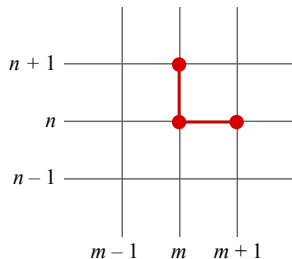
Schematy z Przykładu 4 można przedstawić następująco:

*forward-time
forward-space**forward-time
backward-space**forward-time
central-space**Lax-Friedrichs*

Czy można od razu zauważyć, że jakiś schemat nie zadziała?

Schemat *forward-time forward-space* na każdym kroku bierze informacje z punktów leżących „na prawo” od aktualnie przybliżanego punktu.

Dla $a > 0$ rozwiązanie równania transportu to fala, która transportuje informację **od lewej do prawej**.



Jeszcze jeden przykład (nieco inny)

Przykład 9.

Zajmijmy się teraz niejednorodnym równaniem przewodnictwa ciepła, tzn. $u_t = bu_{xx} + f$, dla którego

$$\mathcal{L}\phi(t, x) = \phi_t(t, x) - b\phi_{xx}(t, x).$$

Jednym z popularniejszych schematów dla tego równania jest schemat *Cranka-Nicolsona*:

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi_m^n = \frac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^n}{k} - \frac{b}{2} \left(\frac{\phi_{m+1}^{n+1} - 2\phi_m^{n+1} + \phi_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\phi_{m+1}^n - 2\phi_m^n + \phi_{m-1}^n}{h^2} \right),$$

a także $\mathcal{R}_{k,h}f(t_n, x_m) = \frac{1}{2} (f_m^{n+1} + f_m^n)$.

Jeszcze jeden przykład (nieco inny)

Przykład 9.

Znów skorzystamy ze wzory Taylora dla ϕ , ale w punkcie $(t_{n+\frac{1}{2}}, x_m)$, gdzie $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{1}{2}k$. Wówczas

$$\begin{aligned}\phi_m^{n+1} &= \phi_m^{n+\frac{1}{2}} + \frac{k}{2} \phi_t \Big|_m^{n+\frac{1}{2}} + \frac{k^2}{8} \phi_{tt} \Big|_m^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(k^3), \\ \phi_m^n &= \phi_m^{n+\frac{1}{2}} - \frac{k}{2} \phi_t \Big|_m^{n+\frac{1}{2}} + \frac{k^2}{8} \phi_{tt} \Big|_m^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(k^3).\end{aligned}$$

Ponadto, dla $i = 0, 1$ mamy

$$\phi_{m\pm 1}^{n+i} = \phi_m^{n+i} \pm h \phi_x \Big|_m^{n+i} + \frac{h^2}{2} \phi_{xx} \Big|_m^{n+i} \pm \frac{h^3}{6} \phi_{xxx} \Big|_m^{n+i} + \mathcal{O}(h^4).$$

Jeszcze jeden przykład (nieco inny)

Przykład 9.

Stąd

$$\frac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^n}{k} = \phi_t \Big|_m^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(k^2) = \frac{1}{2} \left(\phi_t \Big|_m^{n+1} + \phi_t \Big|_m^n \right) + \mathcal{O}(k^2),$$

$$\frac{\phi_{m+1}^{n+i} - 2\phi_m^{n+i} + \phi_{m-1}^{n+i}}{h^2} = \phi_{xx} \Big|_m^{n+i} + \mathcal{O}(h^2),$$

czyli

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,h} \phi_m^n &= \frac{1}{2} \left(\phi_t \Big|_m^{n+1} + \phi_t \Big|_m^n \right) - \frac{b}{2} \left(\phi_{xx} \Big|_m^{n+1} + \phi_{xx} \Big|_m^n \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Jeszcze jeden przykład (nieco inny)

Przykład 9.

Z drugiej strony

$$\mathcal{R}_{k,h}\mathcal{L}\phi_m^n = \frac{1}{2} \left(\phi_t \Big|_m^{n+1} + \phi_t \Big|_m^n \right) - \frac{b}{2} \left(\phi_{xx} \Big|_m^{n+1} + \phi_{xx} \Big|_m^n \right),$$

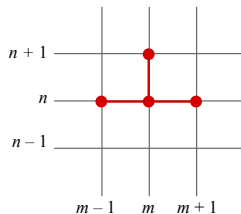
czyli

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) - \mathcal{R}_{k,h}\mathcal{L}\phi(t_n, x_m) = \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2) \xrightarrow{k,h \rightarrow 0^+} 0,$$

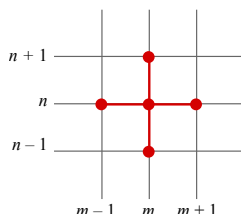
czyli schemat jest zgodny z równaniem.

Schematy dla równań parabolicznych

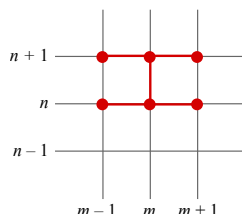
Schematy dla równania przewodnictwa ciepła (z Przykładu 5) można przedstawić następująco:



*forward-time
central-space*



leapfrog



Crank-Nicolson

Dokładność schematu

- Zauważmy, że w każdym z omawianych schematów badana różnica (z definicji zgodności) zachowywała się w nieco inny sposób.
- Wprowadza się pojęcie tzw. dokładności schematu (w przypadku równań zwyczajnych mówi się po prostu o zgodności rzędu p).

Definicja 3.

Mówimy, że schemat różnicowy $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = \mathcal{R}_{k,h}f(t_n, x_m)$, zgodny z równaniem różniczkowym $\mathcal{L}u = f$, jest **dokładny rzędu** (p, q) , jeśli dla dowolnej gładkiej funkcji ϕ i dla dowolnego punktu (t_n, x_m) na siatce zachodzi

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) - \mathcal{R}_{k,h}\mathcal{L}\phi(t_n, x_m) = \mathcal{O}(k^p) + \mathcal{O}(h^q).$$

Parametry metody nie muszą być niezależne

- Zazwyczaj krok czasowy wybiera się jako funkcję kroku przestrzennego, tzn.

$$k = \Phi(h),$$

gdzie Φ jest pewną gładką funkcją zmiennej h taką, że $\Phi(0) = 0$.

- Mówimy wówczas, że schemat jest **dokładny rzędu r** , jeśli dla dowolnej gładkiej funkcji ϕ mamy

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) - \mathcal{R}_{k,h}\mathcal{L}\phi(t_n, x_m) = \mathcal{O}(h^r)$$

Parametry metody nie muszą być niezależne

Przy takich oznaczeniach mamy:

- schemat *forward-time forward-space* jest dokładny rzędu 1 dla równania transportu ($a < 0$) – biorąc $k = \lambda \cdot h$;
- schemat *Laxa-Friedrichsa* jest dokładny rzędu 1 dla równania transportu (dowolne a) – biorąc $k = \lambda \cdot h$;
- schemat *Cranka-Nicolsona* jest dokładny rzędu 2 dla równania przewodnictwa ciepła – biorąc $k = \mu \cdot h^2$.

W dalszej części zajmiemy się wyłącznie równaniami jednorodnymi.

Stabilność

Oznaczenie.

Dla funkcji v zdefiniowanej w punktach $x_m = mh$ sieci wprowadzamy normę

$$\|v\|_h^2 = h \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |v_m|^2, \quad \text{gdzie } v_m = v(x_m).$$

Jest to norma w $L^2(\mathbb{R})$ funkcji schodkowej

$$v(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m \chi_{[x_m, x_{m+1})}(x).$$

Stabilność

Definicja 4.

Mówimy, że schemat różnicowy $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = 0$ dla równania różniczkowego cząstkowego zawierającego jedynie pierwszą pochodną po t jest **stabilny** w obszarze stabilności Λ , jeśli istnieje $J \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego $T > 0$ istnieje stała C_T taka, że

$$\|u^n\|_h \leq \left(C_T \sum_{j=0}^J \|u^j\|_h^2 \right)^{1/2} \quad \text{dla } 0 \leq nk \leq T \text{ i } (k, h) \in \Lambda.$$

Inaczej: norma L^2 funkcji u na n -tym poziomie czasowym szacuje się przez normy L^2 funkcji u na pierwszych $J + 1$ poziomach.

Stabilność

- Obszar stabilności Λ to dowolny ograniczony zbiór w pierwszej ćwiartce \mathbb{R}^2 (niepusty), w którym początek układu współrzędnych jest punktem skupienia.
- Podana definicja dotyczy równań jednorodnych – analogiczną definicję dla równań niejednorodnych otrzymuje się stosując zasadę Duhamela.
- Wówczas okazuje się, że definicja stabilności pozostaje niezmienną – schemat $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = \mathcal{R}_{k,h}f$ dla równania $\mathcal{L}u = f$ jest stabilny, jeśli jest stabilny dla równania $\mathcal{L}u = 0$.

Kiedy metoda jest stabilna?

Przykład 10.

Rozważmy schemat postaci $u_m^{n+1} = \alpha u_m^n + \beta u_{m+1}^n$ (np. schemat *forward-time forward-space* dla równania transportu). Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |u_m^{n+1}|^2 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\alpha u_m^n + \beta u_{m+1}^n|^2 \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (|\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2) |u_m^n|^2 \end{aligned}$$

Kiedy metoda jest stabilna?

Przykład 10.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |u_m^{n+1}|^2 &\leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |u_m^n|^2 \\ &\leq \dots \\ &\leq (|\alpha| + |\beta|)^{2(n+1)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |u_m^0|^2. \end{aligned}$$

Zatem jeśli $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, to schemat jest stabilny z $J = 0$.

Kiedy metoda jest stabilna?

Przykład 10.

Wracając do schematu *forward-time forward-space*, mamy

$$u_m^{n+1} = (1 + a\lambda)u_m^n - a\lambda u_{m+1}^n, \quad \text{gdzie } \lambda = \frac{k}{h},$$

co pokazuje, że jest on stabilny, jeśli $|1 + a\lambda| + |a\lambda| \leq 1$.

Prowadzi to do warunku $-1 \leq a\lambda \leq 0$. Nie jest to wynik przypadkowy.

Warunek CFL – równania hiperboliczne

Twierdzenie 1.

Rozważmy jawny schemat różnicowy dla jednorodnego równania transportu $u_t + au_x = 0$ postaci

$$u_m^{n+1} = \alpha u_{m-1}^n + \beta u_m^n + \gamma u_{m+1}^n,$$

gdzie $\lambda = \frac{k}{h} = \text{const.}$ Warunkiem koniecznym stabilności jest **warunek Couranta-Friedrichsa-Lewy'ego (CFL)**:

$$|a\lambda| \leq 1.$$

Wady schematów jawnych

Twierdzenie 2.

Nie istnieją jawne, zgodne schematy różnicowe dla hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych, które są bezwarunkowo stabilne.

- Powyższe twierdzenie nie dotyczy schematów niejawnych.
- Nie dotyczy również schematów dla równań parabolicznych.

Znów przykłady – równanie transportu

Przykład 11.

Schemat *backward-time backward-space* dla równania transportu ($a > 0$), tzn.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + a \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = 0,$$

jest bezwarunkowo stabilny (tzn. stabilny dla dowolnego λ).

Oczywiście, nawet jeśli możemy wybrać λ dowolnie duże i mieć stabilny schemat, to wyniki nie będą poprawnie przybliżały rozwiązania dopóki λ nie będzie rozsądnie małe.

Znów przykłady – równanie przewodnictwa ciepła

Przykład 12.

Schemat *Du Forta-Frankela* dla równania przewodnictwa ciepła:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} = b \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2},$$

jest jawny i bezwarunkowo stabilny (tzn. stabilny dla dowolnego $\mu = \frac{k}{h^2}$).

Niestety mimo to, schemat ten ma swoje inne ograniczenia. M.in. jego dokładność jest wyznaczona przez $\mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(k^2 h^{-2})$.

Główny wynik

Również w przypadku równań cząstkowych zgodność i stabilność stanowią zestaw warunków koniecznych i wystarczających, by schemat był zbieżny. Samo zagadnienie musi być jednak dobrze postawione.

Definicja 5.

Mówimy, że problem początkowy $\mathcal{L}u = 0$, $u(0, \cdot) = u_0$ jest **poprawnie postawiony** w przestrzeni z normą $\|\cdot\|$, jeżeli dla dowolnych danych początkowych zachodzi

$$\|u(t, \cdot)\| \leq C_t \|u_0\|,$$

gdzie stała C_t zależy tylko od t .

Interesuje nas norma L^2 – w takiej normie badamy stabilność.

Główny wynik

Twierdzenie 3 (Laxa-Richtmyera).

Jednokrokowy schemat różnicowy zgodny z poprawnie postawionym w L^2 zagadnieniem początkowym jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest stabilny.

Zanim przejdziemy do szczegółów, będziemy musieli doprecyzować, o jaką zbieżność nam chodzi. Najpierw jednak kilka narzędzi.

Krótki wstęp do transformacji Fouriera

- Jednym z najważniejszych narzędzi w badaniu stabilności schematów różnicowych jest **analiza fourierowska** (nazywana również **analizą von Neumanna**).
- **Transformatą Fouriera** funkcji $v \in L^1(\mathbb{R})$ nazywamy funkcję

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) e^{-ix\xi} dx.$$

- Przy pewnych dodatkowych założeniach dowodzi się, że prawdziwy jest wzór na transformatę odwrotną:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{v}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Krótki wstęp do transformacji Fouriera

- Dowodzi się również, że wzory te są prawdziwe dla $v \in L^2(\mathbb{R})$, a transformacja Fouriera jest **izometrią** na $L^2(\mathbb{R})$, tzn. zachowuje normę $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{v}\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (\text{równość Parsewala}).$$

- *Najważniejsza własność*: transformacja Fouriera zamienia operatory różniczkowe na algebraiczne, np.

$$\widehat{v_x}(\xi) = i\xi\widehat{v}(\xi).$$

Dyskretna transformacja Fouriera

Rozważamy funkcje na siatce, tzn. w punktach $h\mathbb{Z} = \{mh : m \in \mathbb{Z}\}$.

Definicja 6.

Dla $v \in L^2(h\mathbb{Z}) = \{v : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : \|v\|_h < \infty\}$ definiujemy

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} hv_m e^{-imh\xi}, \quad \text{dla } \xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}\right],$$

i \hat{v} nazywamy **dyskretną transformatą Fouriera** funkcji v .

Dyskretna transformacja Fouriera

- Transformata odwrotna zadana jest wzorem

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \hat{v}(\xi) e^{imh\xi} d\xi, \quad \text{dla } m \in \mathbb{Z}.$$

- Wzór ten wynika z jednoznaczności przedstawienia $\hat{v}(\xi)$ w postaci szeregu Fouriera: dowodzi się, że $\{\sqrt{h/(2\pi)}e^{-imh\xi}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ tworzą bazę przestrzeni $L^2([-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}])$, a następnie korzysta z twierdzenia z *Analizy funkcjonalnej*.

Dyskretna transformacja Fouriera

- Z równości Parsevala dla uogólnionych szeregów Fouriera (także dowodzonej na AF) wynika również, że

$$\|\widehat{v}\|_{L^2([-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}])} = \|v\|_h,$$

gdzie

$$\|v\|_h = \sqrt{h \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |v_m|^2}$$

(dla przypomnienia).

Stabilność (równoważnie)

Przypomnijmy definicję stabilności.

Definicja 4.

Mówimy, że schemat różnicowy $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = 0$ dla równania różniczkowego cząstkowego zawierającego jedynie pierwszą pochodną po t jest **stabilny** w obszarze stabilności Λ , jeśli istnieje $J \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego $T > 0$ istnieje stała C_T taka, że

$$\|u^n\|_h \leq C_T \sum_{j=0}^J \|u^j\|_h$$

dla $0 \leq nk \leq T$ i $(k, h) \in \Lambda$.

Stabilność (równoważnie)

Równoważnie możemy ją zapisać inaczej:

Definicja 4' (równoważna).

Mówimy, że schemat różnicowy $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = 0$ dla równania różniczkowego cząstkowego zawierającego jedynie pierwszą pochodną po t jest **stabilny** w obszarze stabilności Λ , jeśli istnieje $J \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego $T > 0$ istnieje stała C_T taka, że

$$\|\widehat{u}^n\|_{L^2([-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}])} \leq C_T^* \sum_{j=0}^J \|\widehat{u}^j\|_{L^2([-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}])}$$

dla $0 \leq nk \leq T$ i $(k, h) \in \Lambda$.

Analiza von Neumanna – przykład

Zaczniemy od konkretnego przykładu: zajmijmy się schematem *forward-time backward-space* dla jednorodnego równania transportu:

$$u_m^{n+1} = (1 - a\lambda)u_m^n + a\lambda u_{m-1}^n, \quad \lambda = \frac{k}{h}.$$

Zastosujmy wzór na odwrotną transformatę Fouriera dla funkcji u^n :

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \left((1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi} \right) \widehat{u}^n(\xi) e^{imh\xi} d\xi$$

Porównajmy ten wzór ze wzorem na odwrotną transformatę Fouriera funkcji u^{n+1} .

Transformata Fouriera jest wyznaczona jednoznacznie

Z jednej strony mamy

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \widehat{u^{n+1}}(\xi) e^{imh\xi} d\xi,$$

a z drugiej wyznaczyliśmy

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \left((1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi} \right) \widehat{u^n}(\xi) e^{imh\xi} d\xi.$$

Stąd (z jednoznaczności)

$$\widehat{u^{n+1}}(\xi) = \left((1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi} \right) \widehat{u^n}(\xi) =: g(h\xi) \widehat{u^n}(\xi).$$

Współczynnik wzmocnienia

Otrzymaliśmy równość

$$\widehat{u}^{n+1}(\xi) = \left((1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi} \right) \widehat{u}^n(\xi) =: g(h\xi) \widehat{u}^n(\xi),$$

która mówi, że przesuwanie się z rozwiązaniem o jeden krok czasowy do przodu jest równoważne pomnożeniu transformaty Fouriera rozwiązania przez **współczynnik wzmocnienia** $g(h\xi)$. Stąd

$$\widehat{u}^n(\xi) = g^n(h\xi) \cdot \widehat{u}^0(\xi).$$

Dzięki transformacie Fouriera możemy zapisać w ten sposób każdy jednokrokový liniowy schemat różnicowy.

Analiza stabilności

Dzięki równości Parsevala otrzymujemy dodatkowo:

$$\|u^n\|_h^2 = \|\widehat{u^n}\|_{L^2([-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}])}^2 = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} |\widehat{u^n}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} |g(h\xi)|^{2n} |\widehat{u^0}|^2 d\xi.$$

Widzimy zatem, że nierówność z definicji stabilności będzie zachodziła (dla $J = 0$), tylko jeśli $|g(h\xi)|^n$ będzie ograniczone, czyli jeśli $|g(h\xi)| \leq 1$.

Zbadajmy $g(h\xi)$ w naszym przykładzie.

Analiza stabilności – przykład

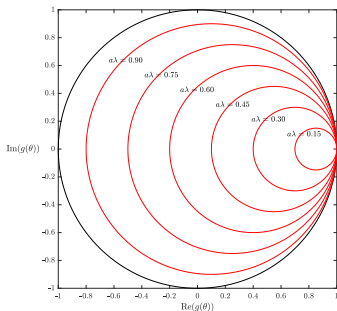
Przykład 13.

W przypadku schematu *forward-time backward-space* mamy (podstawiając $\theta = h\xi$)

$$g(\theta) = (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-i\theta}.$$

Można (formalnie) pokazać, że warunkiem stabilności jest

$$0 \leq a\lambda \leq 1.$$



Analiza stabilności – przykład

Przykład 14.

Z kolei dla schematu *forward-time central-space* mamy

$$g(\theta) = 1 - \frac{a\lambda}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 1 + ia\lambda \sin \theta,$$

co mówi, że schemat jest niestabilny dla dowolnego λ .

Analiza stabilności

- W przykładach współczynnik wzmocnienia g był funkcją jedynie zmiennej $\theta = h\xi$, jednak w ogólności g może zależeć zarówno od h jak i k .
- Rozważamy zazwyczaj schematy dla równania $u_t + au_x = 0$, jednak definicja stabilności jest identyczna dla szerszej klasy równań cząstkowych (pierwszego rzędu względem czasu).
- Istnieje warunek równoważny stabilności takich równań.

Warunek równoważny stabilności

Twierdzenie 4 (von Neumann).

Jednokrokowy schemat różnicowy (dla równania pierwszego rzędu względem t , o stałych współczynnikach i o współczynniku wzmocnienia g) jest stabilny w obszarze stabilności Λ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała K (niezależna od θ , k i h) taka, że

$$|g(\theta, k, h)| \leq 1 + Kk$$

dla $(k, h) \in \Lambda$. Jeśli $g(\theta, k, h)$ nie zależy od h i k , to warunek stabilności można zastąpić przez

$$|g(\theta)| \leq 1.$$

Analiza stabilności – jeszcze jeden przykład

Przykład 15.

Zajmijmy się niejawnym schematem *Cranka-Nicolsona* dla jednorodnego równania przewodnictwa ciepła ($\mu = k/h^2$):

$$u_m^{n+1} - u_m^n = \frac{b\mu}{2} (u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} + u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n).$$

Jest to schemat jednokrokowy, zatem $\widehat{u}^{n+1}(\xi) = g(h\xi) \cdot \widehat{u}^n(\xi)$.

Zastosujmy wzór na odwrotną transformatę Fouriera dla funkcji u^n oraz u^{n+1} .

Analiza stabilności – jeszcze jeden przykład

Przykład 15.

Po lewej stronie równości otrzymamy

$$\begin{aligned}
 u_m^{n+1} - u_m^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \left(\widehat{u^{n+1}}(\xi) - \widehat{u^n}(\xi) \right) e^{imh\xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \left(g(h\xi) \widehat{u^n}(\xi) - \widehat{u^n}(\xi) \right) e^{imh\xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} (g(h\xi) - 1) \widehat{u^n}(\xi) \cdot e^{imh\xi} d\xi.
 \end{aligned}$$

Analiza stabilności – jeszcze jeden przykład

Przykład 15.

Z kolei po prawej stronie mamy

$$\begin{aligned}
 & \frac{b\mu}{2} \left(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} + u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n \right) \\
 &= \frac{b\mu}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \left((e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) \widehat{u^{n+1}}(\xi) + (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) \widehat{u^n}(\xi) \right) \cdot e^{imh\xi} d\xi \\
 &= \frac{b\mu}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \left((e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) g(h\xi) \widehat{u^n}(\xi) + (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) \widehat{u^n}(\xi) \right) \cdot e^{imh\xi} d\xi \\
 &= \frac{b\mu}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \left((e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) g(h\xi) + (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) \right) \widehat{u^n}(\xi) \cdot e^{imh\xi} d\xi
 \end{aligned}$$

Analiza stabilności – jeszcze jeden przykład

Przykład 15.

Korzystając z jednoznaczności transformaty Fouriera i porównując obie strony dostajemy

$$g(h\xi) - 1 = (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) g(h\xi) + (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}),$$

a zatem

$$g(h\xi) = \frac{1 + b\mu (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) / 2}{1 - b\mu (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) / 2}.$$

Zauważmy, że $e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2 = 2 \cos \theta - 2 = -4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, a więc ostatecznie...

Analiza stabilności – jeszcze jeden przykład

Przykład 15.

... dostajemy

$$g(\theta) = \frac{1 - 2b\mu \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2b\mu \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \theta = h\xi,$$

czyli oszacowanie $|g(\theta)| \leq 1$ jest zawsze spełnione. Schemat *Crank-Nicolsona* jest więc bezwarunkowo stabilny.

Poprawnie postawiony problem

Przypomnijmy definicję sprzed kilku slajdów.

Definicja 5.

Mówimy, że problem początkowy $\mathcal{L}u = 0$, $u(0, \cdot) = u_0$ jest **poprawnie postawiony** w przestrzeni z normą $\|\cdot\|$, jeżeli dla dowolnych danych początkowych zachodzi

$$\|u(t, \cdot)\| \leq C_t \|u_0\|,$$

gdzie stała C_t zależy tylko od t .

Poprawnie postawiony problem

Wykorzystując (dyskretną) transformację Fouriera podaliśmy wcześniej równoważną definicję stabilności schematu oraz warunek równoważny wykorzystujący **współczynnik wzmocnienia**. Podobny zabieg można wykonać z definicją poprawnego postawienia problemu początkowego.

Odpowiednikiem współczynnika wzmocnienia dla równania różniczkowego jest tzw. symbol operatora różniczkowego.

Symbol operatora

Rozważmy zagadnienie

$$(\partial_t + \mathcal{P}(\partial_x))u = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0,$$

czyli jednorodne równanie pierwszego rzędu względem czasu (o stałych współczynnikach). Stosując transformację Fouriera (względem zmiennej przestrzennej) otrzymamy

$$\hat{u}_t(t, \xi) = q(\xi)\hat{u}(t, \xi), \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi),$$

czyli zamieniliśmy problem na *równanie różniczkowe zwyczajne* (z rodziną parametrów ξ).

Symbol operatora

$$\hat{u}_t(t, \xi) = q(\xi)\hat{u}(t, \xi), \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi)$$

Funkcję $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **symbolem operatora różniczkowego** \mathcal{P}^* . Możemy korzystając z tej definicji podać warunek równoważny poprawnego postawienia problemu.

* Formalną definicję symbolu (całego) operatora $\mathcal{L} = \partial_t + \mathcal{P}$ podamy za chwilę.

Warunek równoważny

Twierdzenie 5.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby problem początkowy

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathcal{P}(\partial_x))u &= 0 & \text{dla } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

był poprawnie postawiony w $L^2(\mathbb{R})$ jest istnienie stałej rzeczywistej $q^* \in \mathbb{R}$ takiej, że $\operatorname{Re} q(\xi) \leq q^*$ dla $\xi \in \mathbb{R}$, gdzie q jest symbolem operatora różniczkowego \mathcal{P} .

Warunek równoważny

Dowód (szkic). Zauważmy, że po zastosowaniu transformacji Fouriera otrzymujemy

$$\hat{u}_t(t, \xi) = q(\xi)\hat{u}(t, \xi), \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi),$$

a zatem

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{q(\xi)t}\hat{u}_0(\xi),$$

co po wzięciu modułu i skorzystaniu z warunku $\operatorname{Re} q(\xi) \leq q^*$ daje

$$|\hat{u}(t, \xi)| \leq e^{q^*t} |\hat{u}_0(\xi)|.$$

Korzystając z równości Parsevala otrzymujemy oszacowanie.

Warunek równoważny

Z drugiej strony, jeśli q nie spełnia podanego w twierdzeniu warunku, to biorąc dane początkowe postaci

$$\widehat{u}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_2 - \xi_1}} \cdot \chi_{(\xi_1, \xi_2)}(\xi)$$

dla pewnych $\xi_1 < \xi_2$ otrzymamy, że

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} > C \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

dla dowolnej stałej C , co jest sprzeczne z definicją poprawnego postawienia problemu i kończy dowód. □

Symbol operatora (formalnie)

Definicja 7.

- **Symbolem** $\ell_{k,h}(s, \xi)$ **operatora różnicowego** $\mathcal{L}_{k,h}$ nazywamy funkcję gładką zdefiniowaną za pomocą równości

$$\mathcal{L}_{k,h} \left(e^{skn} e^{imh\xi} \right) = \ell_{k,h}(s, \xi) \cdot e^{skn} e^{imh\xi}.$$

- **Symbolem** $\ell(s, \xi)$ **operatora różniczkowego** \mathcal{L} nazywamy funkcję gładką zdefiniowaną za pomocą równości

$$\mathcal{L} \left(e^{st} e^{ix\xi} \right) = \ell(s, \xi) \cdot e^{st} e^{ix\xi}.$$

Zgodność ponownie odwiedzona (ang. revisited)

Przypomnijmy, że schemat różnicowy $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = 0$ jest zgodny z równaniem, jeśli dla dowolnej gładkiej funkcji ϕ zachodzi

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) - \mathcal{L}\phi(t_n, x_m) \rightarrow 0 \quad \text{gdy } k, h \rightarrow 0^+$$

punktowo w każdym punkcie sieci. Weźmy $\phi(t, x) = e^{st}e^{ix\xi}$, wówczas

$$\mathcal{L}_{k,h}\phi(t_n, x_m) - \mathcal{L}\phi(t_n, x_m) = \ell_{k,h}(s, \xi) \cdot e^{skn}e^{imh\xi} - \ell(s, \xi) \cdot e^{skn}e^{imh\xi},$$

czyli warunkiem równoważnym zgodności jest

$$\ell_{k,h}(s, \xi) - \ell(s, \xi) \rightarrow 0 \quad \text{dla } k, h \rightarrow 0^+.$$

Zgodność ponownie odwiedzona (ang. revisited)

Zauważmy, że w przypadku, gdy $\mathcal{L} = \partial_t + \mathcal{P}(\partial_x) = 0$, możemy napisać $\ell(s, \xi) = s - q(\xi)$, gdzie q jest zdefiniowanym wcześniej symbolem operatora \mathcal{P} . Ponadto zachodzi również poniższe twierdzenie.

Stwierdzenie 1.

Niech $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = 0$ będzie schematem jednokrokovym zgodnym z równaniem $\partial_t u + \mathcal{P}(\partial_x)u = 0$ i posiadającym współczynnik wzmocnienia g . Oznaczmy przez q symbol operatora \mathcal{P} . Wówczas

$$\frac{e^{kq(\xi)} - g(h\xi, k, h)}{k} \rightarrow 0 \quad \text{gdy } k, h \rightarrow 0^+.$$

Zgodność ponownie odwiedzona (ang. revisited)

Dowód (szkic). Wiemy już, że ponieważ schemat jest zgodny, to zachodzi

$$\ell_{k,h}(s, \xi) - \ell(s, \xi) \rightarrow 0 \quad \text{dla } k, h \rightarrow 0^+,$$

a także $\ell(s, \xi) = s - q(\xi)$. Położmy $s = q(\xi)$, wówczas $\ell(q(\xi), \xi) = 0$ i mamy

$$\ell_{k,h}(q(\xi), \xi) \rightarrow 0 \quad \text{dla } k, h \rightarrow 0^+,$$

Zgodność ponownie odwiedzona (ang. revisited)

Można łatwo pokazać, że współczynnik wzmocnienia jest jedynym rozwiązaniem liniowego równania

$$\mathcal{L}_{k,h}(g^n e^{imh\xi}) = 0$$

(co wynika stąd, że dla równania jednorodnego \widehat{u}^n powstaje z \widehat{u}^0 przez przemnożenie przez g^n , a czynnik $e^{imh\xi}$ jest operatorem translacji w dyskretnej transformacji Fouriera). Ponadto (z definicji)

$$0 = \mathcal{L}_{k,h}(g^n e^{imh\xi}) = \mathcal{L}_{k,h}(e^{\frac{1}{k} \ln(g) \cdot kn} e^{imh\xi}) = \ell_{k,h} \left(\frac{1}{k} \ln(g), \xi \right).$$

Zgodność ponownie odwiedzona (ang. revisited)

Ostatecznie dostajemy

$$\ell_{k,h} \left(\frac{1}{k} \ln(g), \xi \right) - \ell_{k,h}(q(\xi), \xi) \rightarrow 0 \quad \text{dla } k, h \rightarrow 0^+,$$

a ponieważ funkcja $\ell_{k,h}$ jest gładka (z definicji) i g jest jedynym rozwiązaniem równania z poprzedniego slajdu, wnioskujemy, że

$$\frac{1}{k} \ln(g) - q(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{dla } k, h \rightarrow 0^+,$$

co możemy zapisać również jako $\frac{1}{k} \ln(g) - q(\xi) = o(1)$.

Zgodność ponownie odwiedzona (ang. revisited)

Mnożąc otrzymany wynik przez k dostajemy

$$\ln(g) = kq(\xi) + o(k) \quad \Leftrightarrow \quad g = e^{kq(\xi)}e^{o(k)},$$

co daje

$$\begin{aligned} \frac{e^{kq(\xi)} - g(h\xi, k, h)}{k} &= \frac{e^{kq(\xi)} - e^{kq(\xi)}e^{o(k)}}{k} \\ &= \frac{e^{kq(\xi)}}{k}(1 - e^{o(k)}) \rightarrow 0 \quad \text{dla } k, h \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

i kończy dowód. □

Już niewiele brakuje

Zbliżamy się już do dowodu głównego twierdzenia.

Musimy jednak najpierw (*wreszcie?*) sprecyzować o jaki rodzaj zbieżności będzie nam chodziło.

Aby to zrobić potrzebujemy jakiegoś operatora interpolacji rozwiązania na siatce na całą półpłaszczyznę (tworzenie łamanej łączącej punkty nie jest wystarczająco dobre).

Świat ciągły \longrightarrow świat dyskretny

Definicja 8.

Niech $u \in L^2(\mathbb{R})$ i \hat{u} będzie transformatą Fouriera u . **Operatorem obcięcia** $T: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(h\mathbb{Z})$ nazywamy operator zadany w następujący sposób:

$$(Tu)_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \hat{u}(\xi) e^{imh\xi} d\xi$$

dla każdego $mh \in h\mathbb{Z}$.

Świat ciągły \longrightarrow świat dyskretny

Oznacza to, że dyskretna transformata Fouriera funkcji Tu jest zadana przez

$$\widehat{(Tu)}(\xi) = \widehat{u}(\xi) \quad \text{dla } |\xi| \leq \frac{\pi}{h}$$

(porównując definicje dyskretnej transformaty i operatora oraz korzystając z jednoznaczności).

Stąd nazwa – operator obcięcia.

Świat ciągły ←— świat dyskretny

Definicja 9.

Niech $v \in L^2(h\mathbb{Z})$ i \hat{v} będzie dyskretną transformatą Fouriera v .

Operatorem interpolacji $S: L^2(h\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ nazywamy operator zadany w następujący sposób:

$$Sv(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \hat{v}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Świat ciągły ←— świat dyskretny

Innymi słowy transformata Fouriera funkcji Sv jest zadana przez

$$(\widehat{Sv})(\xi) = \widehat{v}(\xi) \cdot \chi_{(-\pi/h, +\pi/h)}(\xi) \quad \text{dla } \xi \in \mathbb{R}$$

(znów porównujemy definicje transformaty i operatora oraz korzystamy z jednoznaczności) – uzupełniamy dyskretną transformatę Fouriera *zerem* do całej prostej.

Świat ciągły \longleftrightarrow świat dyskretny

Uwagi.

- Oba zdefiniowane operatory zależą od kroku h (nie zaznaczyliśmy tego w definicji, żeby nie psuć przejrzystości oznaczeń).
- Zauważmy, że $Sv(x_m) = v_m$, więc rzeczywiście operator ten jest operatorem interpolującym.
- Ta definicja daje nam pierwszy krok do twierdzenia o zbieżności schematów.

Kolejny krok bliżej

Stwierdzenie 2.

Jeżeli poprawnie postawione w $L^2(\mathbb{R})$ zagadnienie początkowe

$$\hat{u}_t = q(\xi)\hat{u}, \quad \hat{u}(0) = \widehat{u}_0,$$

jest przybliżone stabilnym jednokrokovym schematem różnicowym zgodnym z równaniem z danymi startowymi Tu_0 , to

$$\|u(t_n, \cdot) - Su^n(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{dla } k, h \rightarrow 0^+,$$

gdzie $t_n = nk \in [0, T]$.

Kolejny krok bliżej

Uwagi.

- W twierdzeniu porównujemy $u(t_n, \cdot)$ z Su^n , a nie z funkcją u^n (czyli porównujemy całe rozwiązanie z rozwiązaniem przybliżonym interpolowanym na całą półpłaszczyznę).
- Dane startowe są w postaci Tu_0 , a nie po prostu $u_0(x_m)$ (i wcale nie musi zachodzić $(Tu_0)_m = u_0(x_m)$).
- Dowód za chwilę – jest to fragment dowodu Twierdzenia Laxa-Richtmyera.

Precyzyjna definicja zbieżności

Definicja 1' (precyzyjna).

Mówimy, że schemat różnicowy $\mathcal{L}_{k,h}u_m^n = 0$ aproksymujący jednorodny problem początkowy

$$\mathcal{L}u = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0,$$

jest **zbieżny**, jeżeli funkcja Su^n zbiega do $u(t_n, \cdot)$ w $L^2(\mathbb{R})$ przy $k, h \rightarrow 0^+$, gdzie $t_n = nk$, dla każdego rozwiązania u równania różniczkowego i rozwiązania u_m^n schematu różnicowego takiego, że Su^0 zbiega do $u(0, \cdot)$ w $L^2(\mathbb{R})$ przy $h \rightarrow 0^+$.

Dowód głównego wyniku

Jesteśmy już gotowi, żeby przeprowadzić dowód głównego twierdzenia tej części wykładu. Przypomnijmy, że zakładamy, że równanie różniczkowe jest postaci $(\partial_t + \mathcal{P}(\partial_x))u = 0$ – jednorodne, liniowe, pierwszego rzędu po czasie i o stałych współczynnikach. Będziemy również przez cały czas zakładać, że g i q są funkcjami ciągłymi.

Twierdzenie 3 (Laxa-Richtmyera).

Jednokrokowy schemat różnicowy zgodny z poprawnie postawionym w L^2 zagadnieniem początkowym jest zbieżny (w sensie definicji z poprzedniego slajdu) wtedy i tylko wtedy, gdy jest stabilny.



Przypadek 1

Żeby zachować przejrzystość, oznaczmy rozwiązanie schematu różnicowego przez v , a rozwiązanie zagadnienia różniczkowego przez u .

Założmy na początek, że dane początkowe są postaci

$$v^0 = Tu_0.$$

Pokażemy w pierwszym kroku, że

$$\|u_0 - Sv^0\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$



Przypadek 1 – Krok 1

Istotnie:

$$\begin{aligned}
 \|u_0 - Sv^0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\widehat{u}_0 - \widehat{Sv^0}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}_0(\xi) - \widehat{Sv^0}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{|\xi| \leq \pi/h} |\widehat{u}_0(\xi) - \widehat{v^0}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > \pi/h} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{|\xi| \leq \pi/h} |\widehat{u}_0(\xi) - \widehat{Tv^0}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > \pi/h} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{|\xi| > \pi/h} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0
 \end{aligned}$$

(korzystając z Lematu Riemanna-Lebesgue'a).



Przypadek 1 – Krok 2

Będziemy starali się pokazać taką samą zbieżność, ale dla dowolnego t_n (czyli udowodnimy Stwierdzenie 2).

Z definicji współczynnika wzmocnienia, dla $|\xi| \leq \frac{\pi}{h}$ mamy:

$$\widehat{v}^n(\xi) = g^n(h\xi, k, h) \cdot \widehat{v}^0(\xi) = g^n(h\xi, k, h) \cdot \widehat{T}u_0(\xi) = g^n(h\xi, k, h) \cdot \widehat{u}_0(\xi)$$

(z definicji T).

Stąd natychmiast dostajemy

$$v_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} g^n(h\xi, k, h) \cdot \widehat{u}_0(\xi) e^{imh\xi} d\xi$$

Zatem, z definicji operatora interpolacji, możemy rozszerzyć to rozwiązanie na całą prostą:

$$\begin{aligned} Sv^n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} g^n(h\xi, k, h) \cdot \widehat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g^n(h\xi, k, h) \cdot \chi_{(-\pi/h, +\pi/h)}(\xi) \cdot \widehat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Podobną zależność możemy uzyskać dla rozwiązania zagadnienia różniczkowego.

Przypomnijmy, że rozwiązanie równania możemy zapisać jako

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{q(\xi)t} \widehat{u}_0(\xi),$$

a stąd dla $t = t_n$ dostajemy

$$u(t_n, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{q(\xi)t_n} \cdot \widehat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

co pozwala nam porównać ze sobą $u(t_n, x)$ oraz $Sv^n(x)$.

Stąd:

$$u(t_n, x) - Sv^n(x) = \int_{|\xi| \leq \pi/h} (e^{q(\xi)t_n} - g^n(h\xi, k, h)) \cdot \widehat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} d\xi + \int_{|\xi| > \pi/h} e^{q(\xi)t_n} \cdot \widehat{u}_0(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Mówi nam to, że transformatą Fouriera funkcji $u(t_n, \cdot) - Sv^n$ jest funkcja

$$\Phi_h(\xi) = \begin{cases} (e^{q(\xi)t_n} - g^n(h\xi, k, h)) \cdot \widehat{u}_0(\xi) & \text{dla } |\xi| \leq \frac{\pi}{h}, \\ e^{q(\xi)t_n} \cdot \widehat{u}_0(\xi) & \text{dla } |\xi| > \frac{\pi}{h}. \end{cases}$$

Korzystając z równości Parsevala otrzymujemy

$$\|u(t_n, \cdot) - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{|\xi| \leq \pi/h} |e^{q(\xi)t_n} - g^n(h\xi, k, h)|^2 \cdot |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ + \int_{|\xi| > \pi/h} |e^{q(\xi)t_n}|^2 \cdot |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\phi_h(\xi) = \begin{cases} |e^{q(\xi)t_n} - g^n(h\xi, k, h)|^2 \cdot |\widehat{u}_0(\xi)|^2 & \text{dla } |\xi| \leq \frac{\pi}{h}, \\ |e^{q(\xi)t_n}|^2 \cdot |\widehat{u}_0(\xi)|^2 & \text{dla } |\xi| > \frac{\pi}{h}, \end{cases}$$

a wówczas $\|u(t_n, \cdot) - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \phi_h(\xi) d\xi.$



Przypadek 1 – Krok 4

W kolejnych krokach będziemy starali się pokazać, że:

- 1 funkcja ϕ_h jest punktowo zbieżna do zera,
- 2 funkcja ϕ_h jest jednakowo ograniczona przez funkcję całkowalną.

Pozwoli nam to na skorzystanie z Twierdzenia Lebesgue'a (o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod całką) i zakończy dowód.

Zauważmy najpierw, że ponieważ zakładaliśmy, że $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ (zakładając, że problem jest poprawnie postawiony w L^2), to zachodzi również $\widehat{u}_0 \in L^2(\mathbb{R})$ i jest to funkcja skończona prawie wszędzie.



Przypadek 1 – Krok 5

Zacniemy od punktowej zbieżności do zera. Zauważmy, że ze stabilności schematu oraz poprawności postawienia problemu wynika, że istnieje stała $C_T > 0$ taka, że

$$\left| e^{q(\xi)t} \right| \leq C_T, \quad \left| g^n(h\xi, k, h) \right| \leq C_T$$

dla $t \in [0, T]$, $0 \leq nk \leq T$, $(k, h) \in \Lambda$ oraz właściwych ξ .

Wynika stąd, że dla $|\xi| \leq \frac{\pi}{h}$ mamy

$$\left| e^{q(\xi)t_n} - g^n(h\xi, k, h) \right| \leq nC_T \left| e^{q(\xi)k} - g(h\xi, k, h) \right|.$$

Istotnie, oznaczając $e^{q(\xi)t_n} = e^{q(\xi)kn} =: z^n$, możemy zauważyć, że

$$z^n - g^n = (z - g) \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-j} g^j,$$

a stąd, ponieważ $|z|^{n-j} |g|^j \leq C_T$, mamy

$$|z^n - g^n| \leq nC_T |z - g|,$$

co daje poszukiwane oszacowanie.



Przypadek 1 – Krok 5

Ustalmy punkt $t^* = t_n$ oraz $\xi \in \mathbb{R}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ze Stwierdzenia 1 wiemy, że istnieją $k_0 > 0$ i h_0 takie, że dla $0 < k < k_0$ i $0 < h < h_0$ (bez utraty ogólności $h_0 \leq \frac{\pi}{|\xi|}$) zachodzi

$$\left| \frac{e^{q(\xi)k} - g(h\xi, k, h)}{k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{t_n \cdot C_T}.$$

Weźmy takie k_0 i h_0 . Wówczas dla $0 < k < k_0$ i $0 < h < h_0$ mamy

$$|e^{q(\xi)t_n} - g^n(h\xi, k, h)| \leq nC_T |e^{q(\xi)k} - g(h\xi, k, h)| \leq nC_T \frac{k\varepsilon}{t_n \cdot C_T} = \varepsilon,$$

co daje nam zbieżność punktową $\phi_h(\xi) \rightarrow 0$ dla $k, h \rightarrow 0^+$.

Zauważmy ponadto, że ponieważ

$$\phi_h(\xi) = \begin{cases} |e^{g(\xi)t_n} - g^n(h\xi, k, h)|^2 \cdot |\widehat{u}_0(\xi)|^2 & \text{dla } |\xi| \leq \frac{\pi}{h}, \\ |e^{g(\xi)t_n}|^2 \cdot |\widehat{u}_0(\xi)|^2 & \text{dla } |\xi| > \frac{\pi}{h}, \end{cases}$$

to

$$\phi_h(\xi) \leq (2C_T)^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2,$$

a zatem ϕ_h szacuje się z góry przez funkcję całkowalną.



Przypadek 1 – Podsumowanie

Podsumowując, z Twierdzenia Lebesgue'a (o zmajorzowanym przejściu do granicy pod całką) otrzymujemy, że

$$\|u(t_n, \cdot) - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \phi_h(\xi) d\xi \xrightarrow{k, h \rightarrow 0^+} 0,$$

co kończy dowód implikacji... w pierwszym przypadku. ;-)



Przypadek 2

Założmy teraz, że dane początkowe v^0 nie są postaci Tu_0 (ale spełniają założenia definicji zbieżności, tzn. $Sv^0 \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} u(0, \cdot)$). Oznaczmy przez w rozwiązanie schematu różnicowego z danymi początkowymi Tu_0 .

Stosując proste sztuczki pokażemy (korzystając z poprzedniego przypadku), że $\|u(t_n, \cdot) - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})}$ również zbiega do zera.

|| ⇐ ||

Przypadek 2 – Krok 1

Zauważmy, że

$$\|u(t_n, \cdot) - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u(t_n, \cdot) - Sw^n\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|Sw^n - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

co wynika z prostej nierówności trójkąta.

Wiemy już (z poprzedniego przypadku), że **pierwszy** składnik dąży do zera. Wystarczy więc zająć się drugim.

Dla drugiego składnika mamy:

$$\begin{aligned}
 \|Sw^n - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\| \widehat{Sw}^n - \widehat{Sv}^n \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left\| \widehat{w}^n - \widehat{v}^n \right\|_{L^2([- \pi/h, + \pi/h])} \\
 &\leq \|w^n - v^n\|_h \leq C_T \|w^0 - v^0\|_h = C_T \|Tu_0 - v^0\|_h \\
 &= C_T \left\| \widehat{Tu}_0 - \widehat{v}^0 \right\|_{L^2([- \pi/h, + \pi/h])} \\
 &= C_T \left\| \widehat{u}_0 \cdot \chi_{\{|\xi| \leq \pi/h\}} - \widehat{v}^0 \right\|_{L^2([- \pi/h, + \pi/h])} \\
 &\leq C_T \left(\left\| \widehat{u}_0 - \widehat{v}^0 \cdot \chi_{\{|\xi| \leq \pi/h\}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\| \widehat{u}_0 \cdot \chi_{\{|\xi| > \pi/h\}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)
 \end{aligned}$$

(rozszerzając normę na całe \mathbb{R} i korzystając z nierówności trójkąta)

Dla drugiego składnika mamy:

$$\begin{aligned} \|Sw^n - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C_T \left(\left\| \widehat{u}_0 - \widehat{v}^0 \cdot \chi_{\{|\xi| \leq \pi/h\}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\| \widehat{u}_0 \cdot \chi_{\{|\xi| > \pi/h\}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \\ &= C_T \left(\left\| \widehat{u}_0 - \widehat{Sv}^0 \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\| \widehat{u}_0 \cdot \chi_{\{|\xi| > \pi/h\}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \\ &= C_T \left(\|u_0 - Sv^0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\| \widehat{u}_0 \cdot \chi_{\{|\xi| > \pi/h\}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \end{aligned}$$

(korzystając z równości Parsevala)



Przypadek 2 – Krok 3

Mamy zatem

$$\|Sw^n - Sv^n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_T \left(\|u_0 - Sv^0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\hat{u}_0 \cdot \chi_{\{|\xi| > \pi/h\}}\|_{L^2(\mathbb{R})} \right).$$

Zauważmy, że pierwszy składnik zbiega do zera z założenia (z definicji zbieżności), a drugi zbiega do zera z Lematu Riemanna-Lebesgue'a.

Kończy to dowód tego przypadku... i całej implikacji. :-)

II \Rightarrow II

Wprowadzenie

Przeprowadzimy dowód nie wprost, tzn. pokażemy, że jeśli schemat nie jest stabilny, to nie może być zbieżny.

Pokażemy to konstruując dane początkowe u_0 tak, by rozwiązanie numeryczne v_m^n (z danymi startowymi $v^0 = Tu_0$) nie zbiegało do funkcji u (w sensie zbieżności Sv^n do $u(t_n, \cdot)$ w $L^2(\mathbb{R})$).

Podstawowym narzędziem, z którego będziemy korzystać jest Twierdzenie 4 (von Neumanna), które mówiło, że schemat jest stabilny (w obszarze Λ) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $K > 0$ taka, że $|g(h\xi), k, h| \leq 1 + Kk$ dla $(k, h) \in \Lambda$.

|| \Rightarrow ||

Krok 1

Zauważmy, że jeśli schemat jest niestabilny, to współczynnik wzmocnienia spełnia następującą własność:

$$\forall M > 0 \quad \forall \Lambda \quad \exists (k_M, h_M) \in \Lambda \quad \exists \xi_M$$

$$|g(h_M \xi_M, k_M, h_M)| > 1 + M k_M,$$

gdzie Λ są obszarami w pierwszej ćwiartce takimi, że $(0, 0)$ jest punktem skupienia, a także $|h_M \xi_M| \leq \pi$.

|| ⇒ ||

Krok 1

W szczególności, ponieważ zakładamy, że g jest funkcją ciągłą, to możemy napisać, że

$$\forall M > 0 \quad \forall \Lambda \quad \exists (k_M, h_M) \in \Lambda \quad \exists \xi_M \quad \exists \eta_M > 0 \quad \forall \xi: |\xi - \xi_M| \leq \eta_M$$

$$|g(h_M \xi, k_M, h_M)| > 1 + \frac{1}{2} M k_M.$$

Weźmy więc $M \in \mathbb{Z}_+$, a także wybierzmy zbiory Λ_M tak, żeby $\Lambda_M \subset \Lambda_{M-1} \setminus \{(k_{M-1}, h_{M-1})\}$. Możemy ograniczyć również η_M tak, by $\eta_M \leq \frac{1}{M^2}$.

II \Rightarrow II

Krok 1

Biorąc pod uwagę ten wybór, możemy napisać, że niestabilność implikuje, że

$$\forall M \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists k_M < k_{M-1} \quad \exists h_M < h_{M-1} \quad \exists \xi_M \quad \exists 0 < \eta_M \leq 1/M^2 \quad \forall |\xi - \xi_M| \leq \eta_M$$

$$|g(h_M \xi, k_M, h_M)| > 1 + \frac{1}{2} M k_M$$

(i parametry k_M , h_M są dodatnie). Otrzymaliśmy więc malejące ciągi punktów (k_M) i (h_M) , a także przedziały $[\xi_M - \eta_M, \xi_M + \eta_M]$. W kolejnym kroku pokażemy, przedziały te można wybrać tak, by były rozłączne.

$\| \Rightarrow \|$

Krok 2

Oznaczmy $I_M = [\xi_M - \eta_M, \xi_M + \eta_M]$.

Udowodnimy następujący fakt: Niech $M > 1$, wówczas przedział I_M da się wybrać tak, by był rozłączny ze wszystkimi przedziałami I_1, \dots, I_{M-1} .

Przypuśćmy, że to nie jest prawda i niech M będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że I_M nie da się wybrać tak, by był rozłączny ze wszystkimi przedziałami I_1, \dots, I_{M-1} .*

* Pamiętajmy, że wybór przedziału oznacza nie tylko wybór ξ_M i η_M , ale także k_M i h_M .

|| \Rightarrow ||

Krok 2

Musi wówczas istnieć $N_0 < M$ takie, że $I_M \subset I_{N_0}$. Oznaczmy sumę przedziałów $J = \bigcup_{N < M} I_N$, wówczas dla $\xi \notin J$, a także $k < k_{M-1}$ i $h < h_{M-1}$, zachodzi

$$|g(h\xi, k, h)| \leq 1 + Mk.$$

Możemy więc powiedzieć (*bardzo nieformalnie*), że schemat jest stabilny dla $\xi \notin J$ (pamiętajmy, że stabilność to zachodzenie tej nierówności dla wszystkich ξ).

II \Rightarrow II

Krok 2

Zauważmy jednak, że ponieważ schemat jest zgodny, to dla wszystkich ξ zachodzi teza Stwierdzenia 1, tzn.

$$\frac{e^{kq(\xi)} - g(h\xi, k, h)}{k} \rightarrow 0 \quad \text{gdy } k, h \rightarrow 0^+,$$

a stąd istnieją $k^* \leq k_M$ i $h^* \leq h_M$, a także stała $C(\xi)$ takie, że dla wszystkich $k < k^*$ i $h < h^*$ mamy

$$\frac{e^{kq(\xi)} - g(h\xi, k, h)}{k} \leq C(\xi).$$

$\| \Rightarrow \|$

Krok 2

Ponadto, ponieważ J jest sumą przedziałów skończonych i domkniętych, a także funkcje q i g są ciągłe, to istnieje $C^* < \infty$ taka, że

$$\forall_{\xi \in J} \quad C(\xi) \leq C^*.$$

Dodatkowo, z tego, że problem był dobrze postawiony wynika, że istnieje stała $C_T > 0$ taka, że

$$\left| e^{q(\xi)t} \right| \leq C_T$$

dla $t \in [0, T]$ i wszystkich ξ . Stąd, dla każdego $K \geq (C_T^{1/n} - 1) / k$ mamy

$$\left| e^{q(\xi)k} \right| = \left| e^{q(\xi)nk} \right|^{1/n} \leq C_T^{1/n} \leq 1 + Kk.$$

|| ⇒ ||

Krok 2

Zatem dla odpowiednio małych k i h , a także $\xi \in J$ mamy

$$|g(h\xi, k, h)| \leq \left| e^{q(\xi)k} \right| + k \cdot \left| \frac{e^{kq(\xi)} - g(h\xi, k, h)}{k} \right| \leq (1 + Kk) + C^*k,$$

co w połączeniu z analogicznym wynikiem dla $\xi \notin J$ daje ostatecznie

$$|g(h\xi, k, h)| \leq 1 + \max\{M, K + C^*\}k$$

i stanowi sprzeczność z naszym założeniem, że schemat jest niestabilny. A zatem przedziały I_M mogą być wybrane jako rozłączne.

|| ⇒ ||

Krok 3

Mając wybrane przedziały I_M , $M \in \mathbb{Z}_+$, możemy zdefiniować odpowiednie dane początkowe u_0 . Niech

$$u_0(x) = \sum_{M=1}^{\infty} w_M(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie w_M są dane poprzez swoje transformaty Fouriera, tzn.

$$\widehat{w_M}(\xi) = \begin{cases} M^{-1} \eta_M^{-1/2}, & \text{dla } \xi \in I_M, \\ 0, & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

gdzie η_M są z konstrukcji przedziałów I_M .

Zbadajmy najpierw, czy takie dane początkowe są poprawne.

$\| \Rightarrow \|$

Krok 4

Zauważmy, że ponieważ zbiory I_M są rozłączne, a także zachodzi równość Parsevala, dostajemy

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \sum_{M=1}^{\infty} \|w_M\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{M=1}^{\infty} \|\widehat{w}_M\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \sum_{M=1}^{\infty} \left(M^{-1}\eta_M^{-1/2}\right)^2 \cdot 2\eta_M \\ &= 2 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^2} = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Zatem $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

|| \Rightarrow ||

Krok 5

Pokażemy teraz, że rozwiązanie schematu (ozn. v_m^n) dla danych początkowych Tu_0 nie zbiegają do rozwiązania u (dane początkowe Tu_0 są poprawne z punktu widzenia definicji zbieżności).

Ustalmy czas T , niech C_T będzie stałą wynikającą z poprawnego postawienia problemu. Możemy wybrać n oraz $M \in \mathbb{Z}_+$ takie, że

$$\frac{T}{2} \leq nk_M \leq T, \quad \text{oraz} \quad \frac{C_T - 1}{M} \leq \frac{T}{8},$$

gdzie k_M pochodzą z konstrukcji I_M .

|| ⇒ ||

Krok 5

Zauważmy też, że dla $h = h_M$ oraz $\xi \in I_M$ mamy

$$\begin{aligned} \left| g^n(h_M \xi, k_M, h_M) - e^{q(\xi)k_M n} \right| &\geq |g(h_M \xi, k_M, h_M)|^n - C_T \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2} M k_M \right)^n - C_T \end{aligned}$$

(korzystając z oszacowań z dowodu rozłączności przedziałów I_M)

Z dotychczasowych rozważań otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \|Sv^n - u(t_n, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\widehat{Sv}^n - \widehat{u}(t_n, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
 &= \|\widehat{v}^n \cdot \chi_{(-\pi/h, +\pi/h)} - \widehat{u}(t_n, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
 &\geq \|\widehat{v}^n - \widehat{u}(t_n, \cdot)\|_{L^2([-\pi/h, +\pi/h])}^2 \\
 &= \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} |g^n(h\xi, k, h) \cdot \widehat{u}_0(\xi) - e^{q(\xi)nk} \cdot \widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} |g^n(h\xi, k, h) - e^{q(\xi)nk}|^2 \cdot |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi
 \end{aligned}$$

|| ⇒ ||

Krok 7

Zatem, ze wcześniejszych oszacowań

$$\begin{aligned} \|Sv^n - u(t_n, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\geq \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \left| g^n(h\xi, k, h) - e^{q(\xi)nk} \right|^2 \cdot |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \left(\left(1 + \frac{1}{2}Mk_M\right)^n - C_T \right) \cdot \left(M^{-1}\eta_M^{-1/2}\right)^2 \cdot 2\eta_M \\ &= 2 \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{2}Mk_M\right)^n - C_T}{M} \right)^2. \end{aligned}$$

Zauważmy ponadto, że dla dowolnych $a \geq 0$ mamy $(1+a)^n \geq 1+an$.

A stąd...

|| ⇒ ||

Krok 7

... dostajemy

$$\begin{aligned} \|Sv^n - u(t_n, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\geq \left(\frac{(1 + \frac{1}{2}Mk_M)^n - C_T}{M} \right)^2 \\ &\geq 2 \left(\frac{1 + \frac{1}{2}Mnk_M - C_T}{M} \right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}nk_M - \frac{C_T - 1}{M} \right)^2 \geq 2 \left(\frac{T}{4} - \frac{T}{8} \right)^2 = \frac{T^2}{32}. \end{aligned}$$

Dowodzi to, że Sv^n nie zbiega do $u(t_n, \cdot)$ w $L^2(\mathbb{R})$... i kończy dowód całego twierdzenia. □

Metody numeryczne dla równań hiper- i parabolicznych

- Twierdzenie Laxa-Richtmyera jest kluczowym wynikiem w tej teorii, ale...
- ... jest obłożone wieloma założeniami.
- Co ze schematami wielokrokowymi?
- Co z zagadnieniami dla równań niejednorodnych?
- Czy możemy oczekiwać innego rodzaju zbieżności niż w normie?
- Te fragmenty teorii – innym razem :-)

KONIEC CZĘŚCI 2