

Metody komputerowe w równaniach różniczkowych

część 3: Równania różniczkowe cząstkowe – eliptyczne

dr inż. Łukasz Błaszczyk

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska

rok akademicki 2018/2019 (semestr zimowy)

Co już wiemy?

Na *Równaniach różniczkowych cząstkowych* najwięcej uwagi poświęca się równaniom eliptycznym. Pokazuje się podstawowe własności takie jak

- własność wartości średniej,
- zasadę maksimum.

Z nich wynika większość pozostałych własności. Twierdzenia te mają również swoje dyskretne odpowiedniki, które pozwalają na pokazanie wyników o zbieżności.

Ze względu na to, że w równaniach eliptycznych żadnej zmiennej nie interpretujemy jako czas, metody rozwiązywania są nieco inne.

Opis zagadnienia

Rozważamy zagadnienie brzegowe dla równania Poissona

$$-\Delta u = -(u_{xx} + u_{yy}) = f \quad \text{w } \Omega,$$

gdzie Ω jest pewnym obszarem w \mathbb{R}^2 z brzegiem Γ .

Aby znaleźć rozwiązanie tego równania, potrzebujemy warunków brzegowych. Rozważamy standardowe przykłady:

- 1 warunek typu Dirichleta, tzn. $u = g$ na Γ ,
- 2 warunek typu Neumanna, tzn. $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h$ na Γ .

Jaka jest fizyczna interpretacja równania i tych warunków?

Oznaczenia

Niech $h > 0$ będzie zadany parametrem i (jak wcześniej) definiujemy punkty siatki

$$(h\mathbb{Z})^2 = \{(x_m, y_n) : x_m = mh, y_n = nh, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

(rozważamy wyłącznie siatki równomierne).

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie pewnym zbiorem otwartym, ograniczonym i spójnym. Oznaczamy

$$\bar{\Omega}_h = \bar{\Omega} \cap (h\mathbb{Z})^2.$$

Oznaczenia

Niech $(x_m, y_n) \in \bar{\Omega}_h$. Analogicznie do wcześniejszych oznaczeń, przez $u_{m,n}$ będziemy oznaczać przybliżenie numeryczne $u(x_m, y_n)$.

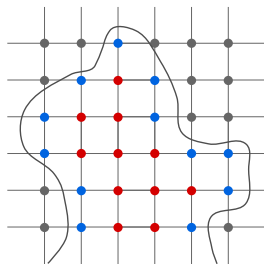
Sąsiadem punktu (x_m, y_n) w $(h\mathbb{Z})^2$ będziemy nazywać każdy punkt $(x_i, y_j) \in (h\mathbb{Z})^2$ taki, że

$$|(x_m, y_n) - (x_i, y_j)| = h.$$

Oznaczenia

Najpierw definiujemy **dyskretny brzeg zbioru** Ω jako zbiór wszystkich punktów $(x_m, y_n) \in (h\mathbb{Z})^2$, dla których zachodzi $(x_m, y_n) \in \overline{\Omega}_h$, ale nie wszyscy sąsiedzi (x_m, y_n) należą do $\overline{\Omega}_h$.

Oznaczamy go przez Γ_h .

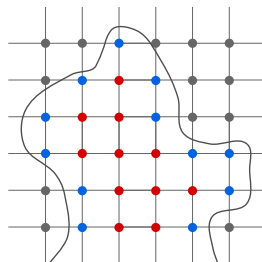


Oznaczenia

Ponadto, niech

$$\Omega_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Gamma_h.$$

Zbiór ten nazywamy **dyskretnym wnętrzem** zbioru Ω .



Podstawowe przybliżenie

Operator Laplace'a możemy przybliżyć tak samo jak w przypadku innych typów równań – drugą pochodną przybliżamy za pomocą schematu centralnego:

$$u_{xx}(x_m, y_n) = \frac{u(x_{m-1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m+1}, y_n)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\approx \frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2}.$$

Analogicznie postępujemy z pochodną u_{yy} (przyjmujemy dla uproszczenia, że siatka ma identyczne wymiary w obu kierunkach).

Podstawowe przybliżenie

Stąd równanie Poissona możemy zapisać w przybliżonej formie jako

$$-\Delta_{5,h}u_{m,n} := -\frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2} - \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h^2} = f_{m,n},$$

dla $(x_m, y_n) \in \Omega_h$. Operator różnicowy $\Delta_{5,h}$ będziemy nazywać **pięciopunktowym (dyskretnym) laplasjanem**.

Można ten wzór zapisać w innej postaci:

$$4u_{m,n} - u_{m-1,n} - u_{m,n-1} - u_{m+1,n} - u_{m,n+1} = h^2 f_{m,n}.$$

Gdzieś to już widzieliśmy...

Zajmijmy się przez chwilę (dyskretnym) równaniem Laplace'a, tzn. $f_{m,n} = 0$. Wówczas możemy schemat różnicowy zapisać w formie

$$u_{m,n} = \frac{1}{4} (u_{m-1,n} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1}).$$

Równość ta mówi, że wartość $u_{m,n}$ jest **średnią** wartości w czterech sąsiednich punktach. Widzieliśmy już podobną własność na *RRCz*.

Twierdzenie 1 (własność wartości średniej).

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie harmoniczna. Wówczas

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall \overline{B(\mathbf{x}, r)} \subset \Omega \quad u(\mathbf{x}) = \frac{1}{|B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})$$

... i wyciągnęliśmy podobne wnioski

Z własności wartości średniej wynikała inna ważna własność – zasada maksimum. Podobnie jest w przypadku dyskretnym.

Twierdzenie 2 (dyskretna zasada maksimum).

Jeśli $-\Delta_{5,h}u_{m,n} \leq 0$ w pewnym zbiorze (w jego dyskretnym wnętrzu), to maksymalna wartość $u_{m,n}$ na tym zbiorze jest osiągnięta na jego (dyskretnym) brzegu. Podobnie, jeśli $-\Delta_{5,h}u_{m,n} \geq 0$, to minimalna wartość $u_{m,n}$ jest osiągnięta na brzegu.

... i wyciągnęliśmy podobne wnioski

Dowód. Przypuśćmy, że maksymalna wartość $u_{m,n}$ jest osiągnięta gdzieś wewnątrz zbioru. Założenie $-\Delta_{5,h}u_{m,n} \leq 0$ jest równoważne nierówności

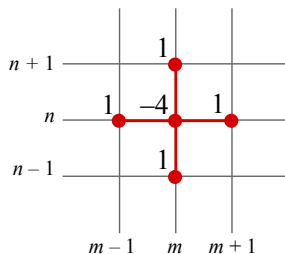
$$u_{m,n} \leq \frac{1}{4}(u_{m-1,n} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1}),$$

tzn. $u_{m,n}$ jest we wnętrzu obszaru co najwyżej równy średniej wartości jego sąsiadów.

... i wyciągnęliśmy podobne wnioski

W punkcie wewnętrznym może występować (lokalne) maksimum tylko jeśli wszyscy czterej jego sąsiedzi mają tę samą (maksymalną) wartość, a nierówność jest tak naprawdę równością.

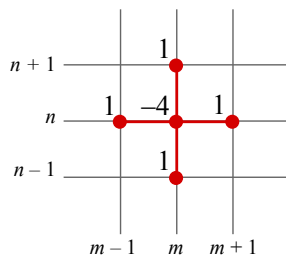
Wobec tego we wszystkich punktach (włącznie z punktami na brzegu) funkcja $u_{m,n}$ musi mieć tę samą wartość. Prowadzi to do sprzeczności i kończy dowód.



... i wyciągnęliśmy podobne wnioski

W przypadku $-\Delta_{5,h}u_{m,n} \geq 0$, rozważając funkcję $v_{m,n} = -u_{m,n}$ sprowadzamy ten przypadek do poprzednio rozważanego, co kończy dowód twierdzenia. \square

Jest to kluczowy składnik dowodów twierdzeń dotyczących stabilności i zbieżności schematu.



Dodatkowe oznaczenie

Omawiając równania ewolucyjne (zależne od czasu) używaliśmy przede wszystkim normy L^2 . Musimy zmodyfikować to podejście, m.in. ponieważ rozważamy równania na podzbiorach \mathbb{R}^2 .

Będziemy posługiwać się normą L^∞ – dla funkcji $v: \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy (dla $S = \bar{\Omega}, \Omega$ lub Γ)

$$\|v\|_{S,\infty} = \max\{|v_{m,n}| : (x_m, y_n) \in S_h, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Działamy na zbiorach ograniczonych, więc taka norma nam w zupełności wystarczy. Ponadto, zazwyczaj będziemy ograniczać się do zbioru $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Podstawowe oszacowania

Zacniemy od narzędzia, które przyda nam się w dowodzie wyniku o zbieżności.

Lemat 1.

Niech $u: \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\Omega = (0, 1)^2$, $\Gamma = \partial\Omega$. Wówczas

$$\|u\|_{\bar{\Omega}, \infty} \leq \|u\|_{\Gamma, \infty} + \frac{1}{8} \|\Delta_{5,h} u\|_{\Omega, \infty}.$$

Podstawowe oszacowania

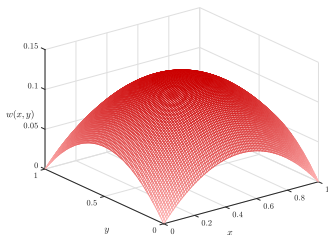
Dowód. Zdefiniujemy funkcję $\omega: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\omega(x, y) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 \right),$$

a także na siatce $\omega_{m,n} = \omega(x_m, y_n)$. Zauważmy na początek, że $0 \leq \omega_{m,n} \leq \frac{1}{8}$ dla wszystkich $(x_m, y_n) \in \bar{\Omega}$. Ponadto

$$-\Delta_{5,h}\omega_{m,n} = 1$$

(długi i żmudny rachunek... albo szybkie obliczenia w *Mathematice*).



Podstawowe oszacowania

Ponadto, zdefiniujemy wewnątrz kwadratu jednostkowego funkcję

$$f_{m,n} = \Delta_{5,h} u_{m,n}.$$

Wówczas oczywiście

$$- \|f_{m,n}\|_{\Omega,\infty} \leq \Delta_{5,h} u_{m,n} \leq \|f_{m,n}\|_{\Omega,\infty}.$$

Podstawowe oszacowania

Położmy

$$v_{m,n}^{\pm} = \pm u_{m,n} - \|f_{m,n}\|_{\Omega,\infty} \omega_{m,n},$$

a wówczas

$$-\Delta_{5,h} v_{m,n}^{\pm} = \mp \Delta_{5,h} u_{m,n} - \|f_{m,n}\|_{\Omega,\infty} \leq 0.$$

Korzystając z dyskretnej zasady maksimum otrzymujemy zatem, że dla $(x_m, y_n) \in \Omega_h$ zachodzi

$$v_{m,n}^{\pm} \leq \|v^{\pm}\|_{\Gamma,\infty} \leq \|u^{\pm}\|_{\Gamma,\infty},$$

co wynika z tego, że $\omega_{m,n} \geq 0$ dla $(x_m, y_n) \in \Gamma$.

Podstawowe oszacowania

Podsumowując, dla $(x_m, y_n) \in \bar{\Omega}$ mamy:

$$\begin{aligned} |u_{m,n}| &\leq |v_{m,n}^\pm| + \|f_{m,n}\|_{\Omega,\infty} \omega_{m,n} \\ &\leq \|u^\pm\|_{\Gamma,\infty} + \frac{1}{8} \|f_{m,n}\|_{\Omega,\infty} \\ &= \|u^\pm\|_{\Gamma,\infty} + \frac{1}{8} \|\Delta_{5,h} u\|_{\Omega,\infty} \end{aligned}$$

(co wynika również z tego, że $\omega_{m,n} \leq \frac{1}{8}$ dla $(x_m, y_n) \in \bar{\Omega}$).

Kończy to dowód. □

Podstawowe oszacowania

Podobnie jak w przypadku poprzednich twierdzeń, analogiczny wynik jest prawdziwy dla funkcji zmiennej ciągłej.

Twierdzenie 3

Niech $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i ograniczonym, będzie rozwiązaniem zagadnienia

$$-\Delta u = f \quad \text{w } \Omega, \quad u = g \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Wówczas

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \cdot (\|g\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

gdzie stała C zależy tylko od n i zbioru Ω .

Kilka uwag

- Zarówno w przypadku dyskretnym, jak i ciągłym możemy rozważać funkcje na innych zbiorach ograniczonych (nie musi to być kwadrat jednostkowy) – wtedy w tezie Lematu 1 będzie występowała inna stała niż $\frac{1}{8}$.
- Wynik ten mówi nam tak naprawdę, że rozważana metoda jest **stabilna** (nieformalnie – rozwiązanie nie będzie wybuchać).
- To twierdzenie jest głównym składnikiem dowodu twierdzenia o zbieżności (dla równania Poissona z zerowym war. brzegowym).

Główny wynik

Twierdzenie 4.

Niech $\Omega = (0, 1)^2$, $\Gamma = \partial\Omega$ i u będzie rozwiązaniem zagadnienia

$$-\Delta u = f \quad \text{w } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{na } \Gamma.$$

Ponadto, niech v będzie numerycznym rozwiązaniem zagadnienia

$$-\Delta_{5,h} v = f_{m,n} \quad \text{w } \Omega_h, \quad v_{m,n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_h,$$

gdzie $f_{m,n} = f(x_m, y_n)$. Wówczas

$$\|v - u\|_{\bar{\Omega}, \infty} \leq Ch^2 \max_{|\alpha|=4} \|D^\alpha u\|_{\Omega, \infty},$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ jest wielowskaźnikiem i $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

Zanim przejdziemy do dowodu...

- W tym twierdzeniu nie jest nic powiedziane o regularności funkcji f i wpływie na regularność funkcji u .
- Klasyczna teoria działa dla obszarów o gładkim brzegu – wówczas, jeśli funkcja f jest klasy C^2 , to rozwiązanie jest klasy C^4 .
- Dla kwadratu można uzyskać analogiczne wyniki dla przestrzeni Sobolewa – jeśli f jest klasy H^2 , to rozwiązanie jest klasy H^4 .
- Przyjmujemy dodatkowe założenia – istnieją pochodne czwartego rzędu funkcji u i są ograniczone.

Dowód głównego wyniku

Dowód. Zdefiniujmy **błąd globalny**, tzn.

$$e_{m,n} = v_{m,n} - u(x_m, y_n).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} -\Delta_{5,h} e_{m,n} &= -\Delta_{5,h} v_{m,n} + \Delta_{5,h} u(x_m, y_n) \\ &= f_{m,n} + \Delta_{5,h} u(x_m, y_n) \\ &= -\Delta u(x_m, y_n) + \Delta_{5,h} u(x_m, y_n) =: \tau_{m,n} \end{aligned}$$

(tę wielkość przyjęto się nazywać **błędem lokalnym**).

Dowód głównego wyniku

Aby oszacować błąd lokalny, skorzystamy ze wzoru Taylora:

$$\begin{aligned}u(x_{m\pm 1}, y_n) &= u(x_m, y_n) \pm hu_x(x_m, y_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_m, y_n) \\ &\quad \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_m, y_n) + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(x_m, y_n) + \mathcal{O}(h^5)\end{aligned}$$

i analogicznie dla pochodnej po y . Wówczas

$$\begin{aligned}\Delta_{5,h}u(x_m, y_n) &= \Delta u(x_m, y_n) \\ &\quad + \frac{h^2}{12}(u_{xxxx}(x_m, y_n) + u_{yyyy}(x_m, y_n)) + \mathcal{O}(h^3).\end{aligned}$$

Dowód głównego wyniku

Daje to nam ostatecznie

$$\begin{aligned}\tau_{m,n} &= -\Delta u(x_m, y_n) + \Delta_{5,h} u(x_m, y_n) \\ &= \frac{h^2}{12} (u_{xxxx}(x_m, y_n) + u_{yyyy}(x_m, y_n)) + \mathcal{O}(h^3),\end{aligned}$$

a zatem dla odpowiednio małych h mamy

$$\begin{aligned}\|\tau\|_{\Omega, \infty} &= \frac{h^2}{12} \max_{(x_m, y_n) \in \Omega} |u_{xxxx}(x_m, y_n) + u_{yyyy}(x_m, y_n)| \\ &\leq Ch^2 \max_{|\alpha|=4} \|D^\alpha u\|_{\Omega, \infty}.\end{aligned}$$

Dowód głównego wyniku

Zauważmy, że z definicji zagadnienia $e_{m,n} = v_{m,n} - u(x_m, y_n) = 0$ dla $(x_m, y_n) \in \Gamma$. Wobec tego, korzystając z Lematu 1 dostajemy

$$\begin{aligned}\|v - u\|_{\bar{\Omega}, \infty} &= \|e\|_{\bar{\Omega}, \infty} \\ &\leq \|e\|_{\Gamma, \infty} + \frac{1}{8} \|\Delta_{5,h} e\|_{\Omega, \infty} = 0 + \frac{1}{8} \|\tau\|_{\Omega, \infty} \\ &\leq Ch^2 \max_{|\alpha|=4} \|D^\alpha u\|_{\Omega, \infty},\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Zgodność schematu

Tym razem nie skorzystaliśmy z pojęć takich jak zgodność schematu, czy stabilność. Można je jednak zdefiniować dla równania Laplace'a czy Poissona, tak samo jak dla równań zależnych od czasu.

Definicja 1.

Mówimy, że schemat różnicowy $\mathcal{L}_h u_{m,n} = \mathcal{R}_h f(x_m, y_n)$ przybliżający równanie różniczkowe cząstkowe $\mathcal{L}u = f$ jest **zgodny** z równaniem różniczkowym, jeśli dla dowolnej gładkiej funkcji ϕ i dla dowolnego punktu (x_m, y_n) na siatce zachodzi

$$\mathcal{L}_h \phi(x_m, y_n) - \mathcal{R}_h \mathcal{L} \phi(x_m, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{gdy } h \rightarrow 0^+.$$

Zgodność schematu

Zauważmy, że w trakcie dowodu Twierdzenia 4 pokazaliśmy, że schemat $-\Delta_{5,h}u_{m,n} = f$ jest rzeczywiście zgodny:

$$\begin{aligned}\Delta_{5,h}u(x_m, y_n) &= \Delta u(x_m, y_n) \\ &\quad + \frac{h^2}{12}(u_{xxxx}(x_m, y_n) + u_{yyyy}(x_m, y_n)) + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

(działamy na zbiorze ograniczonym).

9-punktowy laplasjan

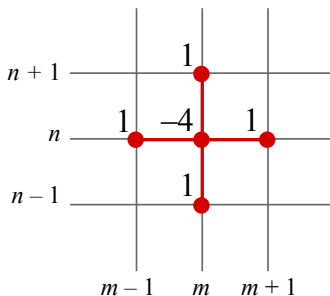
Laplasjan 5-punktowy jest prosty w implementacji (jak zaraz zobaczymy), ale można nim osiągnąć tylko 2-gi rząd zbieżności.

Innym możliwym przybliżeniem jest użycie schematu 9-punktowego:

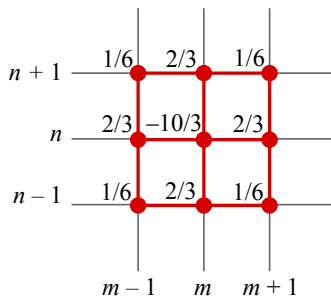
$$\Delta_{9,h}u_{m,n} := \frac{1}{6h^2} (4u_{m-1,n} + 4u_{m+1,n} + 4u_{m,n-1} + 4u_{m,n+1} + u_{m-1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n-1} + u_{m+1,n+1} - 20u_{m,n}),$$

który będziemy oznaczać symbolem $\Delta_{9,h}u_{m,n}$.

Dwa popularne schematy



$$\Delta_{5,h} u_{m,n}$$



$$\Delta_{9,h} u_{m,n}$$

Czy na pewno jest lepiej?

Stosując ten schemat do funkcji gładkiej u i korzystając ze wzoru Taylora otrzymamy:

$$\Delta_{9,h}u(x_m, y_n) = \Delta u + \frac{1}{12}h^2(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \mathcal{O}(h^4)$$

(gdzie wartości po prawej stronie są brane w punkcie (x_m, y_n)).

Na pierwszy rzut oka to przybliżenie nie wygląda dużo lepiej niż przybliżenie 5-punktowe, a błąd jest wciąż rzędu $\mathcal{O}(h^2)$.

Czy na pewno jest lepiej?

Zauważmy jednak, że dominujący wyraz w błędzie lokalnym można zapisać w postaci

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = \Delta(\Delta u) = \Delta^2 u,$$

czyli uzyskaliśmy operator **bilaplasjanu**. Rozwiązując zagadnienie dla równania Poissona $\Delta u = f$ uzyskujemy więc

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = \Delta f$$

(jeśli f jest odpowiednio gładka) i jesteśmy w stanie dzięki temu podwyższyć rząd zbieżności.

Szczególne przypadki

- W szczególności, jeśli rozwiązujemy równanie Laplace'a, wówczas $f = 0$ i dostajemy rząd zbieżności równy 4.
- Podobną sytuację będziemy mieli, gdy funkcja f jest harmoniczna.
- Można jednak poprawić sytuację w przypadku ogólnym...

Szczególne przypadki

W ogólności, możemy uzyskać rząd zbieżności 4 implementując schemat

$$\Delta_{9,h}u_{m,n} = f_{m,n},$$

dla dowolnej (odpowiednio gładkiej) funkcji f , gdzie

$$f_{m,n} = f(x_m, y_n) + \frac{h^2}{12} \Delta f(x_m, y_n).$$

Można na to patrzeć jak na dołożenie do prawej strony równania Poissona błędu rzędu $\mathcal{O}(h^2)$. Jednak ten błąd będzie w stanie zlikwidować błąd rzędu $\mathcal{O}(h^2)$ powstały z oryginalnego schematu.

Szczególne przypadki

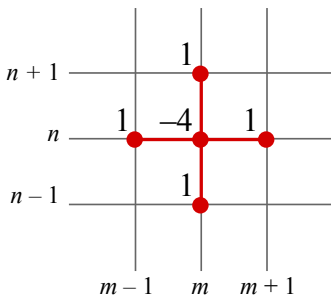
Mając dane $f(x_m, y_n)$ jedynie na siatce (ale wiedząc, że odpowiadająca temu funkcja jest odpowiednio gładka) możemy wciąż otrzymać błąd rzędu 4 definiując

$$f_{m,n} = f(x_m, y_n) + \frac{h^2}{12} \Delta_{5,h} f(x_m, y_n).$$

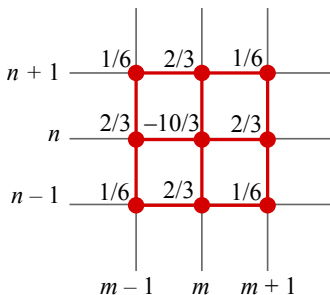
Wprowadzanie dodatkowego błędu jest często spotykaną metodą, która pozwala zniwelować inne błędy schematów różnicowych.

Inne możliwości

Co te schematy mają ze sobą wspólnego?



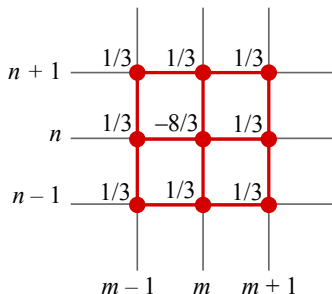
$$\Delta_{5,h}u_{m,n}$$



$$\Delta_{9,h}u_{m,n}$$

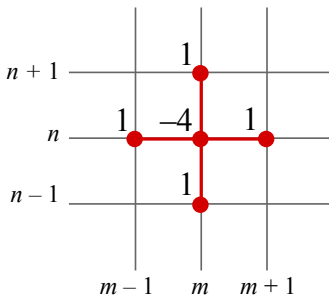
Inne możliwości

Każdy z tych schematów ma **własność wartości średniej**. Nie jest to przypadek – opracowując inne dyskretne wersje laplasjanu należy pamiętać, że każda z nich musi mieć tę własność.

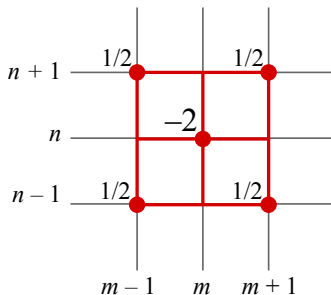


Inne możliwości

W przypadku 9-punktowych laplasjanów są to zazwyczaj średnie ważone dwóch schematów 5-punktowych (które mają rząd $\mathcal{O}(h^2)$):



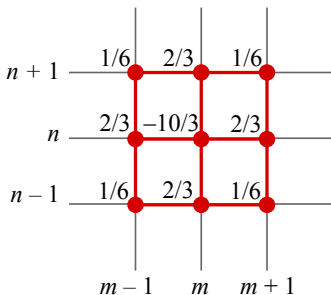
waga $1 - \alpha$



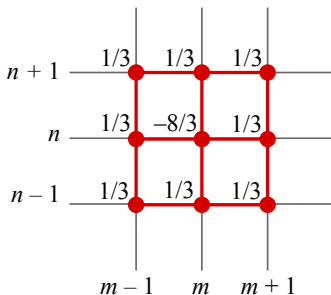
waga α

Inne możliwości

9-punktowy laplasjan, który omawialiśmy wcześniej ($\alpha = \frac{1}{3}$) jest optymalny (może mieć rząd zbieżności $\mathcal{O}(h^4)$).



$$\alpha = \frac{1}{3}$$



$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Układ równań liniowych...

Wróćmy do schematu 5-punktowego dla równania Poissona na kwadracie jednostkowym, tzn.

$$4u_{m,n} - u_{m-1,n} - u_{m,n-1} - u_{m+1,n} - u_{m,n+1} = h^2 f_{m,n},$$

dla $m, n \in \{1, \dots, M-1\}$, z warunkiem brzegowym typu Dirichleta, tzn.

$$u_{0,n} = g_{0,n}, \quad u_{M,n} = g_{M,n}, \quad u_{m,0} = g_{m,0}, \quad u_{m,M} = g_{m,M}.$$

Zauważmy, że mamy wówczas $(M+1)^2$ wartości funkcji u do obliczenia, co prowadzi do układu równań liniowych, którego macierz ma wymiary $(M+1)^2 \times (M+1)^2$.

... który nie tak łatwo zapisać w postaci macierzowej

Omawiając metodę Cranka-Nicolsona dla RPC spotkaliśmy się z układami trójdiodagonalnymi. W przypadku Laplasjanu trudniej jednak zapisać układ w zwartej formie, tak jak to miało miejsce wcześniej.

Należy wprowadzić odpowiednią kolejność zmiennych, np. numerując zmienne wierszowo:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{[0]} \\ \mathbf{u}^{[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{[M]} \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } \mathbf{u}^{[n]} = \begin{pmatrix} u_{0,n} \\ u_{1,n} \\ \vdots \\ u_{M,n} \end{pmatrix}.$$

Macierze układu równań

Prawą stronę układu równań również można zapisać w postaci blokowej:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{[0]} \\ \mathbf{f}^{[1]} \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{[M-1]} \\ \mathbf{u}^{[M]} \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } \mathbf{f}^{[n]} = \begin{pmatrix} u_{0,n} \\ f_{1,n} \\ \vdots \\ f_{M-1,n} \\ u_{M,n} \end{pmatrix},$$

a wartości $u_{m,n}$ na brzegu są zadane (i równe $g_{m,n}$).

Implementacja

- Chcąc skorzystać z metod bezpośrednich (np. eliminacji Gaussa) chcemy zazwyczaj jakoś przenumerać te zmienne tak, by ograniczyć ilość obliczeń.
- W MATLABie odbywa się to automatycznie (operator dzielenia $\mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$), o ile macierz będzie zdefiniowana jako rzadka.
- Trzeba pamiętać, że w MATLABie macierze indeksuje się od 1, a nie od 0 ;-)
- Istnieje metoda rozwiązywania blokowych układów trójdzielnych (algorytm Thomasa) – na laboratorium użyjemy algorytmu dla „zwykłych” układów trójdzielnych.

Algorytm Thomasa dla macierzy blokowych

Rozważmy układ $m \cdot n$ równań liniowych $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{q}$, gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & & & & & \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & & & & \\ & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{C}_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{A}_{m-1} & \mathbf{B}_{m-1} & \mathbf{C}_{m-1} & \\ & & & & \mathbf{A}_m & \mathbf{B}_m & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{[1]} \\ \mathbf{x}^{[2]} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{[m-1]} \\ \mathbf{x}^{[m]} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{[1]} \\ \mathbf{q}^{[2]} \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{[m-1]} \\ \mathbf{q}^{[m]} \end{pmatrix}$$

i \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i są macierzami wymiaru $n \times n$, a $\mathbf{x}^{[i]}$, $\mathbf{q}^{[i]}$ są wektorami n -wymiarowymi.

Zauważmy, że w naszym przypadku macierze \mathbf{B}_i są trójdiagonalne, a \mathbf{A}_i i \mathbf{C}_i są diagonalne.

Algorytm Thomasa dla macierzy blokowych

Algorytm Thomasa przebiega w dwóch etapach – triangulacja i odczytanie wyniku.

Triangulacja blokowa (ang. *block triangularization*):

- 1: $\mathbf{\Gamma}_1 = (\mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{C}_1$
- 2: $\boldsymbol{\beta}^{[1]} = (\mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{q}^{[1]}$
- 3: **for** $k = 2, \dots, m - 1$ **do**
- 4: $\mathbf{\Gamma}_k = (\mathbf{B}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{\Gamma}_{k-1})^{-1} \mathbf{C}_k$
- 5: $\boldsymbol{\beta}^{[k]} = (\mathbf{B}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{\Gamma}_{k-1})^{-1} (\mathbf{q}^{[k]} - \mathbf{A}_k \boldsymbol{\beta}^{[k-1]})$
- 6: **end for**
- 7: $\boldsymbol{\beta}^{[m]} = (\mathbf{B}_m - \mathbf{A}_m \mathbf{\Gamma}_{m-1})^{-1} (\mathbf{q}^{[m]} - \mathbf{A}_m \boldsymbol{\beta}^{[m-1]})$

Uwaga: macierze, które chcemy odwrócić nie zawsze muszą być odwracalne.

Algorytm Thomasa dla macierzy blokowych

Odczytanie wyniku (zamiatanie – ang. *backward sweep*):

- 1: $\mathbf{x}^{[m]} = \boldsymbol{\beta}^{[m]}$
- 2: **for** $k = m - 1, \dots, 1$ **do**
- 3: $\mathbf{x}^{[k]} = \boldsymbol{\beta}^{[k]} - \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{x}^{[k+1]}$
- 4: **end for**

Warto mieć na uwadze, że ten sam algorytm działa dla „zwykłych” macierzy trójdzielnych. Mogą jednak pojawić się problemy z dobrym uwarunkowaniem tego algorytmu.

Inne metody

- Dużą większą rolę w rozwiązywaniu tego typu równań odgrywa **metody iteracyjne** – kosztem przybliżonego rozwiązywania dostajemy krótki czas obliczeń.
- W szczególności do potrzeb rozwiązywania równania Laplace'a dostosowuje się metodę Jacobiego, metodą Gaussa-Seidela, czy metodę nadrelaksacji (ang. *successive overrelaxation* – SOR).
- O tym – innym razem.

Podsumowanie

- Zaprezentowane metody mogą posłużyć (bez większych zmian) do rozwiązania bardziej zaawansowanych zagadnień (np. równania mechaniki płynów dla płynów ściśliwych).
- Metody różnic skończonych to tak naprawdę zaledwie wstęp do metod numerycznych w równaniach cząstkowych.
- Współczesne metody dla równań liniowych wykorzystują głównie narzędzia analizy funkcjonalnej (metoda Galerkina, która prowadzi do metody elementu skończonego).
- O tym w przyszłości (być może). ;-)

KONIEC CZĘŚCI 3