2. Szereg i przekształcenie Fouriera

Zadanie 2.1. Wyznaczyć współczynniki rozwinięcia na trygonometryczny i zespolony szereg Fouriera następujących sygnałów:

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{(a)} & x(t) = 2 + \sin(\omega_0 t) + 2\sin\left(2\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right), & \textbf{(b)} & x(t) = \cos(2t)\sin(3t), \\
\textbf{(c)} & x(t) = \sin(3\pi t) + 4\cos^3(3\pi t), & \textbf{(d)} & x(t) = \dfrac{\sin(2t) + \sin(3t)}{2\sin(t)}.
\end{array}
$$

W każdym przypadku należy wyznaczyć częstotliwość i okres podstawowy sygnału oraz narysować wykresy widma amplitudowego, fazowego i widma mocy.

Zadanie 2.2. Dane są sygnały:

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{(a)} & x(t) = \sin(4t + 30^\circ), & \textbf{(b)} & x(t) = \sin(4t + 30^\circ) + \cos(2t), \\
\textbf{(c)} & x(t) = \sin^3(3t + 20^\circ), & \textbf{(d)} & x(t) = \cos(2t)\sin(4t + 30^\circ).
\end{array}
$$

Wyznaczyć rozkład na wykładniczy szereg Fouriera, stosując tożsamości trygonometryczne. Narysować widmo amplitudowe i fazowe. Obliczyć moc sygnału.

Zadanie 2.3. Wyznaczyć rozwinięcie na wykładniczy szereg Fouriera sygnału

$$x(t) = (1 + 0,5\cos 2\pi t)\cos(8\pi t + 30^\circ).$$

Narysować widmo sygnału i obliczyć jego moc.

Zadanie 2.4. Równanie wejście-wyjście systemu nieliniowego ma postać

$$y(t) = x(t) + 0,1x^3(t).$$

Zakładając, że sygnał wejściowy ma postać $A\cos(\omega_0 t + \varphi)$:

(a) obliczyć sygnał wyjściowy $y(t)$,

(b) narysować widmo amplitudowe i fazowe tego sygnału,

(c) obliczyć współczynnik zawartości harmonicznych.

Przyjąć $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Rozpatrzyć dwa przypadki: (1) $A = 0,5$, (2) $A = 2,5$.

Zadanie 2.5. Wyznaczyć transformaty Fouriera następujących sygnałów:

(**a**) $x(t) = e^{-2|t|}\sin(3t)$;

(**b**) $x(t) = \frac{\sin(\pi t)\sin(\pi(t-1))}{\pi^2 t(t-1)}$;

(**c**) $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$;

(**d**) $x(t) = \mathrm{Sa}(\pi t)\cos(5\pi t)\cos(10\pi t)$;

(**e**) $x(t) = (t^2 - 2t + 1)e^{-t} \cdot \mathbb{1}(t-1)$;

(**f**) $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t-k)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$;

(**g**) $x(t) = \sin\pi t \cdot \Pi\,(t - 0,5)$;

(**h**) $x(t) = e^{-t} \cdot \cos 2\pi f_c t \cdot \mathbb{1}(t)$.

Zadanie 2.6. Korzystając z twierdzenia Parsevala, obliczyć całki:

$$(\mathbf{a}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad (\mathbf{b}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Zadanie 2.7. Widmo Fouriera pewnego sygnału $x(t)$ wyraża się wzorem

$$X(j\omega) = \frac{3 + j\omega}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)}.$$

(**a**) Narysować widmo amplitudowe, fazowe i widmo gęstości energii sygnału $x(t)$.

(**b**) Wyznaczyć i narysować wykres sygnału $x(t)$.

Zadanie 2.8. Dane są sygnały:

$$x(t) = \mathbb{1}(t-1) - 2 \cdot \mathbb{1}(t-2) + \mathbb{1}(t-3), \qquad x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT), \quad T > 2.$$

Niech c_n będą współczynnikami szeregu Fouriera sygnału $x_T(t)$, a $X(j\omega)$ - widmem sygnału $x(t)$.

(**a**) Narysować wykresy sygnałów $x(t)$ i $x_T(t)$.

(**b**) Wyznaczyć widmo Fouriera $X(j\omega)$ sygnału $x(t)$.

(**c**) Wyznaczyć współczynniki c_n i sprawdzić, że $Tc_n = X(jn\omega_0)$.

Zadanie 2.9. Sygnał $x(t)$ ma transformatę Fouriera daną wzorem

$$X(j\omega) = \frac{1}{j}\left(\mathrm{Sa}\left(2\omega - \frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{Sa}\left(2\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

(**a**) Wyznaczyć sygnał $x(t)$.

(**b**) Wyznaczyć transformatę Fouriera $Y(j\omega)$ sygnału okresowego

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - 16n).$$

Zadanie 2.10. Transformata Fouriera sygnału $y(t) = x(t)\cdot\cos\omega_0 t$ jest równa $Y(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right)$. Podać przykład sygnału $x(t)$ oraz wartość $\omega_0 > 0$. Powtórzyć zadanie dla

$$Y(j\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega+1}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega-1}{2}\right).$$

Zadanie 2.11. Napięcie $u(t)$ układu podnoszącego do kwadratu jest równe $u(t) = 0,2i^2(t)$, gdzie $i(t)$ jest prądem wejściowym układu. Przyjmując $i(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$, wyznaczyć napięcie $u(t)$ oraz jego widmo.