3. Zastosowanie przekształcenia Fouriera w analizie systemów

Zadanie 3.1. Układ liniowy stacjonarny o charakterystyce amplitudowo-fazowej:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\omega| \leqslant \omega_g, \\ 0 & \text{dla } |\omega| > \omega_g, \end{cases}$$

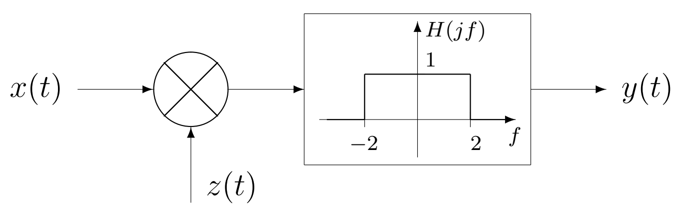
pobudzono sygnałem okresowym $x(t) = x(t + T_0)$, gdzie:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < t \leqslant T_0/2, \\ -1 & \text{dla } T_0/2 < t \leqslant T_0, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad \omega_g T_0 = 10.$$

(**a**) Wyznaczyć (stosując podejście graniczne) i narysować wykres transformaty Fouriera sygnału $x(t)$.

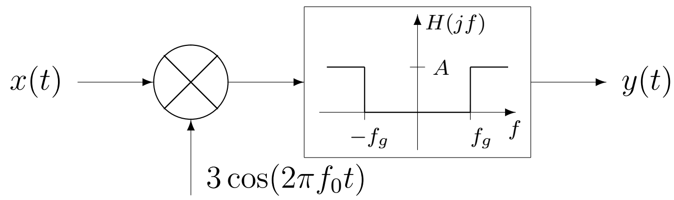
(**b**) Wyznaczyć i narysować sygnał wyjściowy $y(t)$.

Zadanie 3.2. Dany jest sygnał $x(t) = \cos(1998\pi t) + \cos(2002\pi t)$. Czy możliwe jest dobranie takiego sygnału $z(t)$, aby sygnał na wyjściu układu przedstawionego na rysunku 3.1 był równy $\cos(2\pi t)$?



Rys. 3.1. Schemat układu z zadania 3.2.

Zadanie 3.3. Harmoniczny sygnał $x(t)$ o częstotliwości $f_x = 60\text{Hz}$ i amplitudzie $A_x = 2$ podlega mnożeniu przez inny sygnał harmoniczny o częstotliwości f_0, a następnie idealnej filtracji górnoprzepustowej, tak jak pokazano na rysunku 3.2. Należy tak dobrać wielkości f_0, f_g oraz A, aby sygnał na wyjściu systemu był sygnałem harmonicznym o częstotliwości $f_y = 600\text{Hz}$ i amplitudzie $A_y = 12$.



Rys. 3.2. Schemat układu z zadania 3.3.

Zadanie 3.4. Sygnał $x(t)$ podano na wejście pewnego systemu SLS o transmitancji częstotliwościowej

$$H(j\omega) = 2\Pi\left(\frac{\omega}{4}\right)e^{-j3\omega}.$$

Narysować charakterystyki amplitudową i fazową tego filtru. Wyznaczyć i narysować odpowiedź impulsową. Wyznaczyć sygnał $y(t)$ na wyjściu tego systemu w przypadku, gdy:

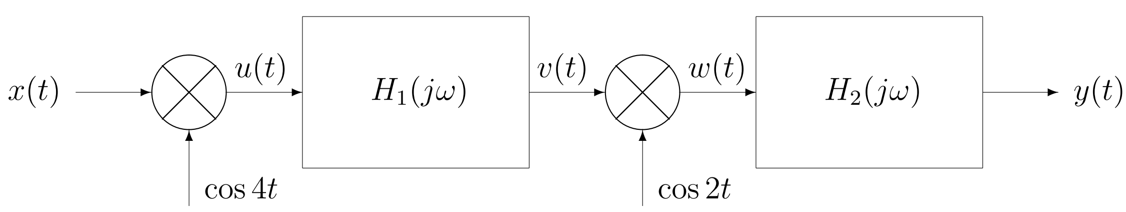
(**a**) $x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2(2t)$, $t \in (-\infty, \infty)$,

(**b**) $x(t)$ to parzysty unipolarny sygnał prostokątny o okresie podstawowym $T_0 = \pi$, amplitudzie $A = 1$ i czasie trwania impulsu $T_0/2$.

Zadanie 3.5. Na rysunku 3.3 przedstawiono schemat pewnego systemu SLS. Transmitancje obu filtrów są następujące:

$$H_1(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega+4}{2}\right) + \Pi\left(\frac{\omega-4}{2}\right), \qquad H_2(j\omega) = 2\Pi\left(\frac{\omega}{6}\right).$$

Wyznaczyć i narysować widma sygnałów $U(j\omega)$, $V(j\omega)$, $W(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ sygnałów $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ i $y(t)$, jeżeli na wejście podano sygnał $x(t) = \mathrm{Sa}(2t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Wyznaczyć postać analityczną odpowiedzi $y(t)$ całego układu.



Rys. 3.3. Schemat układu z zadania 3.5.

Zadanie 3.6. Sygnał $x(t) = 2\mathrm{Sa}(t)\cos(3t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ podano na wejście idealnego filtru górnoprzepustowego o wzmocnieniu w paśmie przepustowym równym 2. Wyznaczyć i narysować gęstość widmową sygnału $x(t)$. Jaka musi być częstotliwość graniczna filtru, aby energia sygnału $y(t)$ na wyjściu filtru stanowiła 25% energii sygnału wejściowego?

Zadanie 3.7. Sygnał zmodulowany amplitudowo postaci $x(t) = (1 + \cos 2\pi t)\cos(20\pi t)$ podano na wejście filtru pasmowoprzepustowego o charakterystyce częstotliwościowej

$$H(jf) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|f-10|+1 & \text{dla } 8 \leqslant f \leqslant 12, \\ -\frac{1}{2}|f+10|+1 & \text{dla } -12 \leqslant f \leqslant -8, \\ 0 & \text{dla } |f| > 12 \text{ i } |f| < 8. \end{cases}$$

Wyznaczyć sygnał $y(t)$ na wyjściu tego filtru oraz jego widmo $Y(jf)$. Naszkicować przebieg sygnału $y(t)$ oraz obliczyć procent mocy całkowitej sygnału $y(t)$ zawartej w jego wstęgach bocznych.

Zadanie 3.8. Na wejście filtru dolnoprzepustowego o transmitancji częstotliwościowej

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\tau}$$

przyłożono sygnał $x(t) = \cos\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t$, $t \in (-\infty, \infty)$. Wyznaczyć widmo sygnału $x(t)$ oraz obliczyś stosunek p_{we} mocy drugiej harmonicznej do mocy pierwszej harmonicznej sygnału wejściowego. Dobrać tak wartość parametru $\tau > 0$, aby stosunek p_{wy} mocy drugiej harmonicznej do mocy pierwszej harmonicznej sygnału wyjściowego $y(t)$ spełniał warunek: $p_{wy} = 0,4 p_{we}$. Wyznaczyć sygnał $y(t)$ na wyjściu filtru, przyjmując wartość parametru τ wyznaczoną w poprzednim punkcie.

Zadanie 3.9. Częstotliwościowa charakterystyka amplitudowa filtru jest równa

$$|H(j\omega)| = \frac{2}{4 + \omega^2}.$$

Wyznaczyć odpowiedź impulsową filtru, jeżeli jego charakterystyką fazową jest:

(a) $\varphi(\omega) = 0$,

(b) $\varphi(\omega) = -k\omega$, $k \neq 0$.

Wyznaczyć zbiór wartości k, dla których co najmniej 95% pola pod wykresem odpowiedzi impulsowej jest zawarte w obszarze $t > 0$.

Zadanie 3.10. Dane są trzy systemy o odpowiedziach impulsowych:

(**a**) $h_1(t) = \mathbb{1}(t)$,

(**b**) $h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t} \cdot \mathbb{1}(t)$,

(**c**) $h_3(t) = 2te^{-t} \cdot \mathbb{1}(t)$.

Wyznaczyć odpowiedź każdego z systemów na pobudzenie sygnałem $x(t) = \cos t$ i charakterystykę częstotliwościową każdego z systemów.

Zadanie 3.11. Dany jest układ LS o transmitancji częstotliwościowej

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 5}.$$

Wyznaczyć i narysować odpowiedzi jednostkową $k(t)$ i impulsową $h(t)$ tego filtru. Narysować częstotliwościowa charakterystykę amplitudową i na jej podstawie określić typ filtracji. Wyznaczyć odpowiedź filtru na pobudzenie

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 0 & \text{dla } t > t_0. \end{cases}$$

Zadanie 3.12. Odpowiedzią systemu LS na wymuszenie skokiem jednostkowym jest sygnał $k(t) = 0,5te^{-5t} \cdot \mathbb{1}(t)$. Wyznaczyć transmitancję częstotliwościową $H(j\omega)$ systemu oraz narysować jego charakterystykę amplitudową. Określić szerokość 3-dB pasma tego systemu. Znaleźć i naszkicować odpowiedź impulsową $h(t)$. Wyznaczyć odpowiedź na pobudzenie sygnałem $x_1(t) = \Pi(t - 0,5)$.

Zadanie 3.13. Dane jest równanie "wejście-wyjście" pewnego systemu LS w postaci:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + 4y(t) = 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 4x(t).$$

Wyznaczyć transmitancję tego systemu, naszkicować jego charakterystykę amplitudową, określić szerokość 3-dB pasma tego systemu. Znaleźć i narysować

(**a**) odpowiedź impulsową $h(t)$ tego systemu,

(**b**) odpowiedź na wymuszenie $x(t) = (e^{-2t} + e^{-3t}) \cdot \mathbb{1}(t)$.

Zadanie 3.14. Działanie pewnego systemu jest opisywane za pomocą równania różniczkowego

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) + 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + 4y(t) = x(t).$$

Znaleźć transmitancję częstotliwościową systemu i odpowiadające jej charakterystyki: amplitudową i fazową.

Zadanie 3.15. Odpowiedź impulsowa systemu SLS jest równa $h(t) = \frac{\sin(2(t-0{,}5))}{\pi(t-0{,}5)}$. Obliczyć sygnał $y(t)$ na wyjściu tego systemu, jeżeli sygnał wejściowy ma postać

(**a**) $x(t) = \frac{\sin t}{\pi t}$;

(**b**) $x(t) = \frac{\sin 3t}{\pi t}$;

(**c**) $x(t) = \cos t$;

(**d**) $x(t) = \cos 3t$.

Zadanie 3.16. Transmitancja częstotliwościowa systemu SLS jest równa

$$X(j\omega) = \frac{3 + j\omega}{4 - \omega^2 + 5j\omega}.$$

(**a**) Zweryfikować charakter filtru (dolnoprzepustowy, górnoprzepustowy, itd.).

(**b**) Podać równanie różniczkowe wiążące sygnał wejściowy $x(t)$ i wyjściowy $y(t)$.

(**c**) Obliczyć odpowiedź impulsową systemu.

(**d**) Znaleźć odpowiedź systemu na wymuszenie sygnałem $x(t) = (1-t)e^{-3t} \cdot \mathbb{1}(t)$.

Zadanie 3.17. $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ jest transmitancją filtru dolnoprzepustowego. Wyznaczyć transmitancję $G(j\omega) = H(\frac{1}{j\omega})$. Wyznaczyć i porównać odpowiadające tym transmitancjom charakterystyki częstotliwościowe.