

4. Próbkowanie sygnałów

Zadanie 4.1. Częstotliwość Nyquista sygnału $x(t)$ jest równa f_0 . Wyznaczyć częstotliwości Nyquista następujących sygnałów:

$$(a) \quad x(t) + x(t - 1), \quad (b) \quad x'(t), \quad (c) \quad x^2(t), \quad (d) \quad x(t) \cos 2\pi f_0 t.$$

Zadanie 4.2. Dane są dwa sygnały dolnopasmowe $x(t)$ i $y(t)$ o widmach $X(jf)$ i $Y(jf)$ takich, że: $X(jf) = 0$ dla $|f| > f_1/2$ i $Y(jf) = 0$ dla $|f| > f_2/2$. Wyznaczyć pasmo oraz częstotliwości Nyquista następujących sygnałów:

$$(a) \quad x(t) + y(t), \quad (b) \quad x(t) * y(t), \quad (c) \quad x(t)y(t).$$

Zadanie 4.3. Dany jest sygnał czasu ciągłego postaci

$$x(t) = 3 \cos(10^3 \pi t) + 5 \sin(3 \cdot 10^3 \pi t) - 10 \cos(6 \cdot 10^3 \pi t).$$

- (a) Wyznaczyć częstotliwość Nyquista tego sygnału.
- (b) Wyznaczyć postać sygnału dyskretnego otrzymanego w wyniku próbkowania z częstotliwością równą $f_s = 500$ próbek na sekundę.
- (c) Wyznaczyć postać sygnału analogowego, który może zostać odtworzony z sygnału spróbkowanego z użyciem idealnego filtra dolnoprzepustowego o częstotliwości granicznej $f_g = f_s/2$ i wzmacnieniu T_s .

Zadanie 4.4. Dany jest sygnał dolnopasmowy $x(t)$ o częstotliwości maksymalnej 6kHz.

- (a) Wyznaczyć częstotliwość Nyquista.
- (b) Jaka powinna być częstotliwość próbkowania, aby w widmie sygnału spróbkowanego występowało tzw. "pasmo ochronne" między poszczególnymi segmentami widma o szerokości 2kHz?
- (c) Dobrać częstotliwość próbkowania f_s oraz wzmacnienie K filtra dolnoprzepustowego o transmitancji częstotliwościowej:

$$H(jf) = \begin{cases} K & \text{dla } |f| \leq 7000, \\ K \left(1 - \frac{|f| - 7000}{3000}\right) & \text{dla } 7000 \leq |f| \leq 10000, \\ 0 & \text{dla } |f| > 10000, \end{cases}$$

który zapewniałby idealne odtworzenie sygnału $x(t)$ z sygnału spróbkowanego.

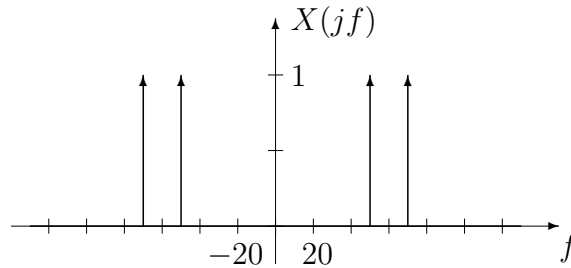
Zadanie 4.5.

- (a) Dany jest sygnał $x(t) = 2 \cos(2\pi t) - \cos(3\pi t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Wyznaczyć i narysować widmo $X(jf)$ tego sygnału. Wyznaczyć częstotliwość Nyquista.
- (b) Sygnał $x(t)$ próbkowany jest sygnałem grzebieniowym o częstotliwości: (i) $f_s = 2\text{Hz}$, (ii) $f_s = 4\text{Hz}$. Wyznaczyć i naszkicować widmo $X_s(jf)$ dla obu schematów próbkowania.
- (c) Sygnał spróbkowany $x_s(t)$ został podany na wejście idealnego filtra dolnoprzepustowego. Wskazać, w którym z przypadków (i), (ii) sygnał analogowy $x(t)$ może być odtworzony z sygnału spróbkowanego $x_s(t)$. Naszkicować charakterystykę częstotliwościową tego filtra.
- (d) Jaki sygnał analogowy otrzymany na wyjściu filtra z punktu (c), jeżeli na wejście podamy sygnał spróbkowany (por. punkt (b)) z częstotliwością mniejszą od częstotliwości Nyquista?

Zadanie 4.6. Sygnał $x(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, jest spróbkowany z częstotliwością $f_s = 3f_{max}$, gdzie f_{max} jest częstotliwością maksymalną sygnału $x(t)$.

- (a) Wyznaczyć i narysować widmo sygnału spróbkowanego $x_s(t)$.
- (b) Narysować charakterystykę częstotliwościową filtra, który z sygnału $x_s(t)$ będzie odtwarzał sygnał $x(t)$.

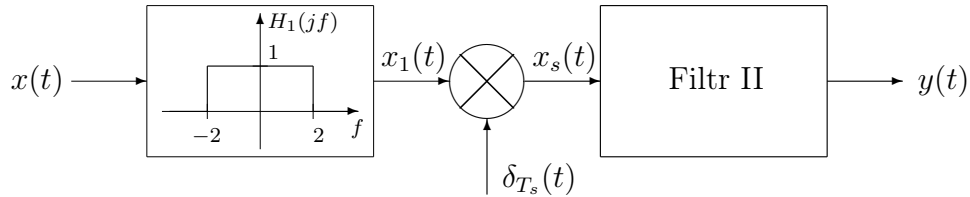
Zadanie 4.7. Widmo $X(jf)$ ma kształt jak na rysunku 4.1. Wyznaczyć sygnał $x(t)$. Wyznaczyć i narysować widmo sygnału spróbkowanego sygnałem grzebieniowym, jeżeli częstotliwość próbkowania: (i) $f_s = 40\text{Hz}$, (ii) $f_s = 90\text{Hz}$, (iii) $f_s = 200\text{Hz}$. Jaki sygnał analogowy zostanie odtworzony z sygnału spróbkowanego we wszystkich przypadkach przy zastosowaniu idealnego filtra dolnoprzepustowego o częstotliwości granicznej 50Hz i wzmacnieniu $1/f_s$?



Rys. 4.1. Widmo sygnału $x(t)$ z zadania 4.7.

Zadanie 4.8. Sygnał $x(t) = 9\text{Sa}^2(3\pi t)$ został podany na wejście idealnego filtra dolnoprzepustowego I o transmitancji $H_1(j\omega)$ (rysunek 4.2) i próbkowany z częstotliwością $f_s = 2\text{Hz}$.

- (a) Wyznaczyć i narysować widma sygnałów $x(t)$, $x_1(t)$ oraz $x_s(t)$.
- (b) Jaka powinna być charakterystyka częstotliwości $H_2(j\omega)$ idealnego filtra dolnoprzepustowego II, aby na wyjściu układu otrzymać sygnał $y(t) = 4\text{Sa}(4\pi t)$?



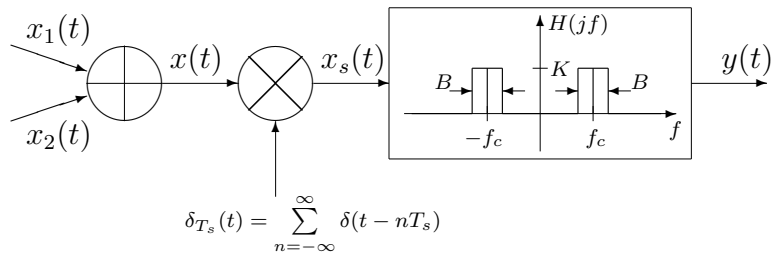
Rys. 4.2. Schemat układu z zadania 4.8.

Zadanie 4.9. Sygnał $x(t) = \text{Sa}(\pi t) \cos(2\pi t)$ został poddany próbkowaniu idealnemu z częstotliwością $f_s = 1,5\text{Hz}$, a następnie podany na wejście filtra dolnoprzepustowego o transmitancji $H(jf) = (1/f_s)\Pi(f/2)$. Na wyjściu układu otrzymuje się sygnał $y(t)$.

- (a) Wyznaczyć i narysować widmo sygnału $x(t)$. Podać częstotliwość Nyquista.
- (b) Wyznaczyć i narysować widmo $X_s(jf)$ sygnału próbkowanego $x_s(t)$.
- (c) Narysować widmo sygnału $y(t)$ na wyjściu filtra. Podać wzór analityczny sygnału $y(t)$.

Zadanie 4.10. Widma sygnałów $x_1(t)$ oraz $x_2(t)$ są dane wzorami $X_1(jf) = \Pi(f/2)$ oraz $X_2(jf) = \Pi(f/4)$. Sygnały te są dodawane, a ich suma jest następnie próbkowana sygnałem grzebieniowym o częstotliwości $f_s = 6\text{Hz}$ (rysunek 4.3).

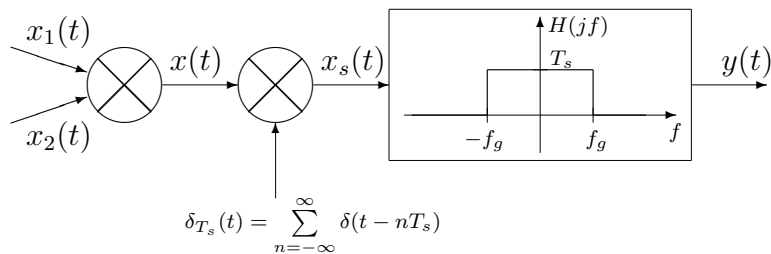
- (a) Wyznaczyć częstotliwość Nyquista sygnału $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Wyznaczyć i narysować widmo sygnału próbkowanego $X_s(jf)$.
- (b) Jaką należałoby przyjąć częstotliwość próbkowania f_s , aby widmo sygnału próbkowanego było stałe i równe $2f_s$ dla $f \in \mathbb{R}$?
- (c) Sygnał próbkowany z częstotliwością wyznaczoną w punkcie (b) podano na wejście idealnego filtra pasmowoprzepustowego o wzmacnieniu $K = 1/2$, częstotliwości środkowej $f_c = 4\text{Hz}$ i szerokości pasma przepustowego $B = 3\text{Hz}$. Wyznaczyć sygnał $y(t)$ i jego widmo $Y(jf)$ na wyjściu tego filtra.



Rys. 4.3. Schemat układu próbkująco-filtracyjnego z zadania 4.10.

Zadanie 4.11. Sygnał $x(t)$ będący iloczynem $x_1(t) = \text{Sa}(\pi t)$ oraz $x_2(t) = \frac{1}{2}\text{Sa}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ został spróbkowany sygnałem grzebieniowym $\delta_{T_s}(t)$ o częstotliwości $f_s = 1\text{Hz}$. Sygnał spróbkowany $x_s(t)$ został następnie podany na wejście idealnego filtra dolnoprzepustowego o częstotliwości granicznej $f_g = 1,5\text{Hz}$ (rysunek 4.4).

- (a) Wyznaczyć i narysować widmo sygnału $x(t)$ oraz widmo sygnału spróbkowanego $x_s(t)$.
- (b) Wyznaczyć i narysować widmo sygnału $y(t)$ na wyjściu filtra.
- (c) Wyznaczyć postać sygnału $y(t)$.



Rys. 4.4. Schemat układu próbkująco-filtracyjnego z zadania 4.11.

Zadanie 4.12. Sygnał $x(t) = \text{Sa}(\pi t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ został spróbkowany sygnałem

$$\delta_{0,5}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot 0,5),$$

a następnie podany na filtr o odpowiedzi impulsowej $h(t) = \text{Sa}(2\pi t) \cos(4\pi t)$. Wyznaczyć i narysować sygnał spróbkowany $x_s(t)$ oraz jego widmo. Wyznaczyć i narysować sygnał $y(t)$ na wyjściu filtra oraz jego widmo amplitudowe.