

5. DTFT i jego zastosowanie w analizie systemów

Zadanie 5.1. Wyznaczyć DTFT następujących sygnałów:

- (a) $x_1[n] = \begin{cases} C, & N_1 \leq n \leq N_2, \\ 0, & n < N_1 \text{ i } n > N_2, \end{cases}, C \in \mathbb{R}, N_1, N_2 \in \mathbb{Z},$
- (b) $x_2[n] = x[n] \cos(\omega_0 n), \omega_0 \in \mathbb{R}_+,$
- (c) $x_3[n] = a^n \cdot \mathbf{1}[n], |a| < 1,$
- (d) $x_4[n] = (-a)^n \cdot \mathbf{1}[n], |a| < 1.$
- (e) $x_5[n] = a^n \cos(\omega_0 n) \cdot \mathbf{1}[n], |a| < 1, \omega_0 \in \mathbb{R}_+.$

Narysować wykresy widma amplitudowego i fazowego powyższych sygnałów, przyjmując

- (a) $C = 2, N_1 = -2, N_2 = 3,$
- (b) $x[n] = \begin{cases} n, & n = 0, 1, 2, 3, \\ 0, & n < 0 \text{ i } n > 3, \end{cases} \omega_0 = 0, 1\pi,$
- (c) $a = 0, 5.$

Zadanie 5.2. Wyznaczyć odwrotną DTFT, mając dane widmo $X(e^{j\Omega}) = 2 \cos \Omega + \sin 2\Omega.$

Zadanie 5.3. Transformata Fouriera sygnału $x[n]$ dana jest wzorem

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \cdot \frac{\sin \frac{3\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}} + 7\pi\delta(\Omega), |\Omega| \leq \pi.$$

Wyznaczyć $x[n].$

Zadanie 5.4. Na wejście systemu o odpowiedzi impulsowej $h[n]$ podano sygnał dyskretny

$x[n] = \sin(\pi n/8) - 2 \cos(\pi n/4).$ Wyznaczyć odpowiedź systemu w przypadku, gdy:

- (a) $h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n},$
- (b) $h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n} + \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n},$
- (c) $h[n] = \frac{\sin(\pi n/6) \sin(\pi n/3)}{\pi^2 n^2}.$

Zadanie 5.5. System SLS czasu dyskretnego opisany jest równaniem "wejście-wyjście":

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n].$$

- (a) Wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową $H(e^{j\Omega})$ systemu.
- (b) Wyznaczyć odpowiedź impulsową $h[n].$

Zadanie 5.6. System SLS czasu dyskretnego opisany jest równaniem "wejście-wyście":

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n].$$

- (a) Wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową $H(e^{j\Omega})$ systemu.
- (b) Wyznaczyć i narysować charakterystykę amplitudową.
- (c) Wyznaczyć odpowiedzi na pobudzenia: $x[n] = (-\frac{1}{2})^n \cdot \mathbb{1}[n]$ oraz $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$.

Zadanie 5.7. System SLS czasu dyskretnego opisany jest równaniem "wejście-wyście":

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2].$$

- (a) Wyznaczyć odpowiedź impulsową $h[n]$ systemu.
- (b) Wyznaczyć odpowiedź $y[n]$ na pobudzenie $x[n] = e^{j\theta n}$.
- (c) Wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową $H(e^{j\Omega})$ systemu.
- (d) Wyznaczyć i narysować charakterystyki amplitudową i fazową.

Zadanie 5.8. System SLS czasu dyskretnego opisany jest układem równań różnicowych:

$$\begin{cases} y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + w[n] + \frac{1}{2}w[n-1] = \frac{2}{3}x[n], \\ y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + 2w[n] - 2w[n-1] = -\frac{5}{3}x[n], \end{cases}$$

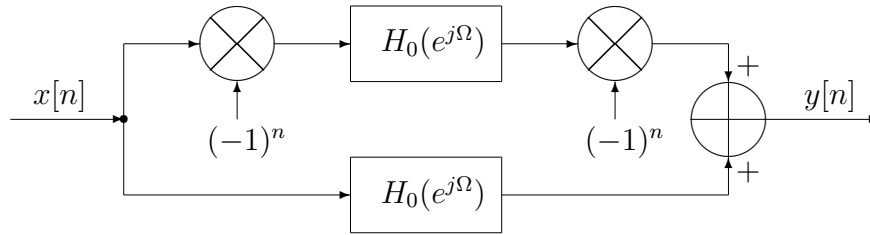
gdzie $x[n]$ jest sygnałem wejściowym, $y[n]$ sygnałem wyjściowym, a $w[n]$ sygnałem wewnętrznym systemu.

- (a) Używając DTFT, sprowadzić powyższy układ równań do równania "wejście-wyście".
- (b) Wyznaczyć transmitancję częstotliwościową $H(e^{j\Omega})$ systemu.
- (c) Wyznaczyć odpowiedź impulsową $h[n]$.

Zadanie 5.9. W systemie, o schemacie przedstawionym na rysunku 5.1, $H_0(e^{j\Omega})$ jest transmitancją częstotliwościową idealnego filtra dolnoprzepustowego:

$$H_0(e^{j\Omega}) = \Pi\left(\frac{\Omega}{\pi/3}\right).$$

Wyznaczyć i narysować transmitancję częstotliwościową $H(e^{j\Omega})$ systemu. Jakiego typu filtrem jest ten system?



Rys. 5.1. Schemat układu z zadania 5.9.

Zadanie 5.10. Dany jest system SLS o charakterystyce częstotliwościowej

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{2}{(1 - e^{-j2\Omega}) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}.$$

- Wyznaczyć równanie różnicowe systemu.
- Narysować schemat blokowy.
- Przyjmując sygnał wejściowy $x[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]/2$, wyznaczyć i narysować charakterystykę amplitudową sygnału wyjściowego $y[n]$.

Zadanie 5.11. System SLS o odpowiedzi impulsowej $h_1[n] = (1/2)^n \cdot \mathbf{1}[n]$ połączono

- szeregowo,
- równolegle

z innym systemem SLS o odpowiedzi impulsowej $h_2[n]$. Transmitancja częstotliwościowa otrzymanego połączenia:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{-7 + 3e^{-j\Omega}}{6 - 5e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}}.$$

Dla każdego z rozpatrywanych połączeń wyznaczyć $h_2[n]$.

Zadanie 5.12. System LS czasu dyskretnego o transmitancji częstotliwościowej

$$H_1(e^{j\Omega}) = \frac{2 - e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

połączono szeregowo z systemem LS o transmitancji

$$H_2(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}.$$

- Wyznaczyć równanie "wejście-wyście" systemu.
- Wyznaczyć odpowiedź impulsową $h[n]$.