imię i nazwisko: .... nr indeksu: ....

1	2	3	4	$\sum$

TCiWdTD – kolokwium 2 – 22 stycznia 2018 r.

Uwaga. Można korzystać z tablic własności transformacji Fouriera'a oraz par funkcja/dystrybucja-transformata Fouriera'a udostępnionych na stronie internetowej przedmiotu. Nie można korzystać z żadnych innych notatek.

Uwaga. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Prace napisane nieczytelnie **nie będą sprawdzane**.

Zadanie 1 (4 punkty)**.** Niech $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie nieujemna i taka, że $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Niech $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, wówczas wiadomo, że $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Wykazać, że jeśli $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, to $f * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows f$ dla $\varepsilon \to 0^+$.

Zadanie 2 (3 punkty)**.** Niech T będzie funkcjonałem na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ danym wzorem:

$$\forall_{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})} \quad \langle T, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0) - t\cdot\varphi'(0)}{t^2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Pokazać, że $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Wskazówka. Skorzystać z Twierdzenia Taylora.

Zadanie 3 (4 punkty)**.** Korzystając z definicji, wyznaczyć dystrybucje $\mathrm{D}f$ oraz $\mathrm{D}^2 f$, gdzie $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dystrybucją regularną generowaną przez funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0,\\ x - [x] & \text{dla } x > 0,\end{cases}$$

a $[x]$ to część całkowita x. Czy dystrybucje $\mathrm{D}f$ oraz $\mathrm{D}^2 f$ są regularne (tzn. czy istnieją słabe pochodne f' i f'')?

Zadanie 4 (4 punkty)**.** Niech $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Wyznaczyć transformatę Fouriera dystrybucji temperowanej generowanej przez wielomian $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dany wzorem

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R},\ a_p \neq 0.$$