imię i nazwisko: .... nr indeksu: ....

1	2	3	4	5	6	$\sum$

TCiWdTD – egzamin 2 – 8 lutego 2018 r.

Uwaga. Można korzystać z tablic własności transformacji i par funkcja/dystrybucja/ciąg–transformata oraz wzorów trygonometrycznych udostępnionych na stronie internetowej przedmiotu. Nie można korzystać z żadnych innych notatek.

Uwaga. Prace napisane nieczytelnie **nie będą sprawdzane**.

Zadanie 1. Zdefiniować szereg trygonometryczny Fouriera funkcji $f \in \mathcal{L}^1([-\ell, \ell])$. Jaką ważną własność ma baza funkcji trygonometrycznych na $[-\ell, \ell]$? Wyprowadzić wzór na współczynniki szeregu Fouriera oraz ich oszacowanie. Narysować (i wyjaśnić) wykres szeregu Fouriera funkcji $f(x) = 2 - x + |x|$ dla $x \in [-2, 2]$.

Zadanie 2. Stosując transformację Laplace'a znaleźć funkcję $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będącą rozwiązaniem równania

$$y(t) = 2t - 2\int_0^t \sin(t-\tau) y'(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Zadanie 3. Zdefiniować dystrybucje regularne i osobliwe. Podać – z wyczerpującym uzasadnieniem – nietrywialny przykład dystrybucji regularnej. Udowodnić, że δ jest dystrybucją osobliwą.

Zadanie 4. Niech $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i niech funkcjonał liniowy nad $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ będzie zadany wzorem:

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^p \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(**a**) Wykazać, że $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, a zatem po zawężeniu do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ funkcjonał f jest dystrybucją temperowaną.

(**b**) Wyznaczyć transformatę Fouriera dystrybucji temperowanej f.

Wskazówka. Przy wyznaczaniu transformaty Fouriera warto skorzystać z tablic.

Zadanie 5. Niech $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wykazać, że jeśli $x^\nu \neq 0$ jest zerem funkcji J_ν, to

$$J_{\nu+1}(x^\nu) \neq 0 \qquad \text{oraz} \qquad J'_\nu(x^\nu) \neq 0.$$

Wskazówka. Warto skorzystać m.in. z faktu, że funkcje Bessela (odpowiednio przeskalowane) tworzą układ ortonormalny (względem iloczynu skalarnego z odpowiednią wagą). Nie trzeba (choć można) dowodzić wzorów z ćwiczeń.

Zadanie 6.

(**a**) Zdefiniować Z-transformatę ciągu $(f_n)_{n\geqslant 0}$. Wyjaśnić w jaki sposób można uzyskać transformatę odwrotną. Co musimy założyć o Z-transformacie $F(z)$ ciągu f_n, aby było możliwe odzyskanie ciągu f_n?

(**b**) Wyznaczyć transformatę odwrotną funkcji

$$F(z) = 1 - \frac{z}{4z^2+1}.$$