imię i nazwisko: .... nr indeksu: ....

1	2	3	4	5	6	$\sum$

TCiWdTD – egzamin 1 – 3 lutego 2018 r.

Uwaga. Można korzystać z tablic własności transformacji i par funkcja/dystrybucja/ciąg–transformata oraz wzorów trygonometrycznych udostępnionych na stronie internetowej przedmiotu. Nie można korzystać z żadnych innych notatek.

Uwaga. Prace napisane nieczytelnie **nie będą sprawdzane**.

Zadanie 1. Zdefiniować funkcję specjalną Gamma i podać (bez dowodu) w jakim zbiorze jest ona holomorficzna oraz jakie ma punkty osobliwe w $\mathbb{C}$. Sformułować i udowodnić Lemat dotyczący uogólnienia silni.

Zadanie 2. Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe dla jednorodnego równania falowego

$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, \qquad \text{dla } t > 0,\ x \in (0,1),$$

z warunkami brzegowymi $u(t,0) = u(t,1) = 0$ oraz warunkami początkowymi $u(0,x) = x(1-x)$, $u_t(0,x) = 0$.

Zadanie 3.

(**a**) Zdefiniować splot funkcji $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i podać przynajmniej trzy różne założenia zapewniające zbieżność splotu.

(**b**) Sformułować i udowodnić Twierdzenie Borela o splocie (tj. dotyczące transformaty Laplace'a splotu funkcji prawostronnych).

Zadanie 4. Zdefiniować dystrybucje regularne i osobliwe. Podać nietrywialny przykład dystrybucji regularnej. Udowodnić, że δ jest dystrybucją osobliwą.

Zadanie 5. Niech $p < n$ i niech funkcjonał liniowy nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ będzie zadany wzorem:

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^p} \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Wykazać, że $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, a zatem po zawężeniu do przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ funkcjonał f jest dystrybucją temperowaną.

Zadanie 6. Wykorzystując Z-transformację rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = n$$

z warunkami początkowymi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.