

imię i nazwisko: ..... nr indeksu: .....

1	2	3	4	5	6	$\Sigma$

**TCiWdTD – egzamin 3 – 26 kwietnia 2018 r.**

**Uwaga.** Można korzystać z tablic własności transformacji i par funkcja/dystrybucja/ciąg–transformata oraz wzorów trygonometrycznych udostępnionych na stronie internetowej przedmiotu. Nie można korzystać z żadnych innych notatek.

**Uwaga.** Prace napisane nieczytelnie **nie będą sprawdzane**.

**Zadanie 1.** Zdefiniować funkcję specjalną Gamma i podać (bez dowodu) w jakim podzbiorze  $\mathbb{C}$  jest ona holomorficzna oraz jakie ma punkty osobliwe w  $\mathbb{C}$ . Sformułować i udowodnić Lemat mówiący o związku funkcji Gamma z silnią.

**Zadanie 2.** Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe dla jednorodnego równania przewodnictwa ciepła

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0 \quad \text{dla } t > 0, x \in (0, 1),$$

z następującymi warunkami początkowo-brzegowymi:

$$u(0, x) = 2x(1 - x) \quad \text{dla } x \in [0, 1], \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \text{dla } t \geq 0.$$

**Zadanie 3.** Zdefiniować (jednostronną) Transformatę Laplace’a funkcji  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Sformułować i udowodnić Twierdzenie Podstawowe o zbieżności Transformaty Laplace’a.

**Zadanie 4.** Korzystając z definicji, wyznaczyć dystrybucje  $Df$  oraz  $D^2f$ , gdzie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest dystrybucją regularną generowaną przez funkcję

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)(x+3) & \text{dla } x \leq -1, \\ -2x & \text{dla } -1 < x \leq 1, \\ -(x-2)(x-3) & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Czy dystrybucje  $Df$  oraz  $D^2f$  są regularne (tzn. czy istnieją słabe pochodne  $f'$  i  $f''$ )?

**Zadanie 5.** Wykazać, że nie istnieje element neutralny splotu w  $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , tzn. taka funkcja  $\psi \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , że

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \quad f * \psi = \psi * f = f,$$

ale dystrybucja Diraca  $\delta$  jest elementem neutralnym splotu w sensie splotu dystrybucji z funkcjami próbnymi oraz w sensie splotu dystrybucji, tzn.

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \delta * f = f, \quad \text{oraz} \quad \forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \delta * f = f.$$

**Zadanie 6.**

(a) Zdefiniować Z-transformatę ciągu  $(f_n)_{n \geq 0}$ . Wyjaśnić w jaki sposób można uzyskać transformatę odwrotną. Jakie założenie o Z-transformacie  $F(z)$  ciągu  $f_n$  pozwala na odzyskanie ciągu  $f_n$ ?

(b) Udowodnić, że jeśli  $Z\{f_n\}(z) = F(z)$  dla  $|z| > r$ , to  $Z\{n \cdot f_n\} = -z \frac{d}{dz} F(z)$  również dla  $|z| > r$ .