imię i nazwisko: .... nr indeksu: ....

1	2	3	4	5	$\sum$

TCiWdTD – kolokwium 1 – 4 grudnia 2017 r.

Uwaga. Można korzystać z tablic własności transformacji Laplace'a, par funkcja-transformata Laplace'a oraz wzorów trygonometrycznych udostępnionych na stronie internetowej przedmiotu. Nie można korzystać z żadnych innych notatek.

Uwaga. Prace napisane nieczytelnie **nie będą sprawdzane**.

Zadanie 1. Niech $x, y \in \mathbb{C}$ będą takie, że $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$. Wykazać, że funkcja B Eulera ma następującą własność:

$$B(x,y) = B(x,y+1) + B(x+1,y).$$

Uwaga. Można wykorzystać własności udowodnione na ćwiczeniach – nie trzeba ich dowodzić.

Zadanie 2. Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

rozwinąć w przedziale $[0,\pi]$ w szereg Fouriera cosinusów (narysować odpowiednie rozszerzenie f na $[-\pi, +\pi]$). Następnie wykazać, że

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Zadanie 3. Niech $f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ i niech $\widehat{f}$ będzie transformatą Fouriera funkcji f. Wykazać, że część rzeczywista $G_1 = \operatorname{Re}\widehat{f}$ i urojona $G_2 = \operatorname{Im}\widehat{f}$ transformaty są funkcjami, odpowiednio, parzystą i nieparzystą względem $\mathbf{x}$, tzn.

$$\forall_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad G_1(-\mathbf{x}) = G_1(\mathbf{x}), \qquad \forall_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad G_2(-\mathbf{x}) = -G_2(\mathbf{x}).$$

Uwaga. Można wykorzystać własności udowodnione na ćwiczeniach – nie trzeba ich dowodzić.

Zadanie 4. Wykazać, że <u>nie</u> istnieje element neutralny splotu w $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, tzn. taka funkcja $\delta \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, że

$$\forall_{f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})} \quad f * \delta = \delta * f = f.$$

Zadanie 5. Stosując przekształcenie Laplace'a rozwiązać następujące równanie różniczkowo-całkowe:

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) + 2\int_0^x \cos(x-t) f''(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^x \sin(x-t) f'(t)\,\mathrm{d}t = \cos x, \qquad f(0^+) = f'(0^+) = 0.$$

Uwaga. Można wykorzystać własności transformacji Laplace'a oraz pary funkcja-transformata dostępne w tablicach.