1. ILOCZYNY NIESKOŃCZONE

Niech $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Rozważamy nieskończone iloczyny

$$\prod_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots .$$

Definicja 1. Iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n \in \mathbb{C}$, nazywamy *zbieżnym*, jeśli zachodzą oba poniższe warunki:

a) $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_0} \quad c_n \neq 0$,

b) istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} (c_{n_0+1} \cdot c_{n_0+2} \cdot \ldots \cdot c_n) \neq 0$.

Definicja 2. Iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$, $c_n \in \mathbb{C}$, nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, jeśli zbieżny jest iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + |c_n|)$ (lub równoważnie: zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$).

---

1. Udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.1 (Warunek Cauchy'ego zbieżności iloczynu nieskończonego)**.** *Iloczyn* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad |c_{n+1} \cdot c_{n+2} \cdot \ldots \cdot c_{n+k} - 1| < \varepsilon.$$

2. Udowodnić poniższe twierdzenie.

Wniosek 1.2 (Warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego)**.** *Jeśli* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

3. Udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.3. *Jeśli* $x_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*, to wówczas*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x_n) \quad \text{jest zbieżny} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{jest zbieżny.}$$

4. Iloczynem dwóch nieskończonych iloczynów $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ i $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ nazywamy nieskończony iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)(1 + b_n)$. Udowodnić poniższe twierdzenie.

Lemat 1.4. *Iloczyn dwóch iloczynów bezwzględnie zbieżnych też jest bezwzględnie zbieżny.*