2. FUNKCJE SPECJALNE EULERA

1. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wykazać, że całka

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t$$

jest zbieżna dla $\alpha > 0$ i rozbieżna dla $\alpha \leqslant 0$.

2. Udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie. *Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym i niech $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych na Ω zbieżnym niemal jednostajnie (tj. zbieżnym jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze Ω) do funkcji $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$. Wówczas funkcja f jest holomorficzna w Ω.*

3. Wykazać, że funkcja

$$\varphi_n(z) = \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) t^{z-1} \, \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t$$

jest holomorficzna w zbiorze $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > -(n+1)\}$.

4. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{-k \colon k = 0, 1, \ldots\}$. Pokazać, że

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

ponadto $\Gamma(1) = 1$, a stąd $\Gamma(n+1) = n!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

5. Niech $x, y \in \mathbb{C}$ będą takie, że $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$. Pokazać, że całka definiująca funkcję B Eulera

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t,$$

gdzie w wyrażeniu potęgowym brana jest gałąź główna logarytmu zespolonego, jest zbieżna.

6. Niech $x, y \in \mathbb{C}$ będą takie, że $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$. Pokazać, że prawdziwe są poniższe wzory:

1. $B(x,y) = B(y,x)$, ponadto $B(1,1) = 1$,
2. $B(x,x) = \dfrac{1}{2^{2x-1}} B\left(\dfrac{1}{2}, x\right)$,
   Wskazówka: $\displaystyle\int_0^1 \ldots = \int_0^{1/2} \ldots + \int_{1/2}^1 \ldots$.
3. $B(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \, \mathrm{d}t$,
4. $B(x,y) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} + t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} \, \mathrm{d}t$,

5. $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, a stąd $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ dla $m,n \in \mathbb{N}$,

6. $B(x,y) = \dfrac{y-1}{x+y-1} B(x,y-1)$ dla $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 1$,

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ dla $m,n \in \mathbb{N}$.

7. Wykazać, że dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{k \colon k \in \mathbb{Z}\}$ zachodzi

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

8. Wykazać, że

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{2\pi}}.$$