3. SZEREGI FOURIERA #1

1. Wykazać, że funkcje bazowe trygonometrycznego szeregu Fouriera, tzn.

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

tworzą układ ortonormalny na przedziale $[-\ell, \ell]$, tzn. dla dowolnych dwóch funkcji bazowych f_n, f_m zachodzi

$$\int_{-\ell}^{+\ell} f_n(x)\overline{f_m(x)}\,\mathrm{d}x = \delta_{n,m} := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n = m, \\ 0 & \text{jeśli } n \neq m. \end{cases}$$

2. Wykazać, że funkcje bazowe wykładniczego szeregu Fouriera, tzn.

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}}\exp\frac{i\pi n x}{\ell}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

tworzą układ ortonormalny na przedziale $[-\ell, \ell]$.

3. Jądrem Fejéra nazywamy funkcję

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(t), \qquad t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

gdzie

$$D_k(t) = \sum_{\ell=-k}^{k} \mathrm{e}^{i2\pi\ell t} = \frac{\sin(\pi(2k+1)t)}{\sin(\pi t)}$$

jest jądrem Dirichleta. Wykazać, że F_N ma następujące własności:

a) $F_N(t) = \dfrac{1}{N+1}\dfrac{\sin^2(\pi(N+1)t)}{\sin^2(\pi t)}$, a stąd $F_N(t) \geqslant 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{T}$,

b) $\displaystyle\int_0^1 F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$,

c) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} F_N(t)\,\mathrm{d}t = 0$ dla $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

4. Wielomianem trygonometrycznym na torusie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nazywamy dowolną funkcję postaci

$$p(x) = \sum_{n=N_0}^{N_1} a_n \mathrm{e}^{i2\pi n x}, \qquad N_0, N_1 \in \mathbb{Z},\ N_0 \leqslant N_1,\ a_n \in \mathbb{C}\ (a_{N_0}, a_{N_1} \neq 0).$$

Wykazać, że wielomiany trygonometryczne są gęste w zbiorze funkcji ciągłych $\mathcal{C}(\mathbb{T};\mathbb{C})$.

Wskazówka. Rozważyć funkcję $\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k f(x)$, gdzie $S_k f$ jest k-tą sumą częściową wykładniczego szeregu Fouriera funkcji f (zdefiniowaną na wykładzie):

$$S_k f(x) = \sum_{\ell=-k}^{k} c_\ell \mathrm{e}^{i2\pi\ell x} = \sum_{\ell=-k}^{k}\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-i2\pi\ell t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{i2\pi\ell x} = \int_0^1 f(x-t)D_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Wykazać, że wielomiany trygonometryczne na $\mathbb{T}$ są gęste w $L^2(\mathbb{T};\mathbb{C})$. Wyciągnąć stąd wniosek, że funkcje bazowe wykładniczego szeregu Fouriera tworzą bazę ortonormalną przestrzeni $L^2(\mathbb{T};\mathbb{C})$ i zachodzi *równość Parsevala*:

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C})} = \|\hat{f}\|^2_{\ell_2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2,$$

gdzie $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, są współczynnikami wykładniczego szeregu Fouriera.
Wskazówka. Wykorzystać gęstość zbioru wielomianów trygonometrycznych na $\mathbb{T}$ w zbiorze funkcji ciągłych $\mathcal{C}(\mathbb{T};\mathbb{C})$ oraz gęstość zbioru funkcji ciągłych $\mathcal{C}(\mathbb{T};\mathbb{C})$ w $L^2(\mathbb{T};\mathbb{C})$ (wykład z Analizy funkcjonalnej).

6. Niech $f \in L^2(\mathbb{T};\mathbb{C})$ będzie taka, że $f' \in L^2(\mathbb{T};\mathbb{C})$. Wykazać, że zachodzi *nierówność Poincaré*:

$$\|f - c_f\|_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C})} \leqslant \frac{1}{2\pi} \|f'\|_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C})},$$

gdzie $c_f = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.