4. SZEREGI FOURIERA #2

1. Rozwinąć w trygonometryczny szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\pi < x \leqslant 0, \\ x & \text{dla } 0 < x < \pi \end{cases}$$

(dookreślić wartości f w odpowiednich punktach). Następnie wykazać, że

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Rozwinąć w trygonometryczny szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} -x-\pi & \text{dla } -\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}, \\ x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ -x+\pi & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Następnie wykazać, że w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zachodzi równość

$$\frac{\pi x}{4} = \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots.$$

3. Rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $(-\pi, \pi)$ funkcję

a) $f(x) = \sin ax$, gdzie a jest dowolną liczbą niecałkowitą,

b) $f(x) = \cos ax$, gdzie a jest dowolną liczbą niecałkowitą

(dla każdej funkcji należy dookreślić wartości w odpowiednich punktach).

4. Funkcję $f(x) = x(\pi - x)$ rozwinąć w przedziale $[0, \pi]$ w szereg

a) cosinusów, b) sinusów.

5. Funkcję $f(x) = \cos x$ rozwinąć w przedziale $(0, \pi)$ w szereg

a) cosinusów, b) sinusów.

6. Znaleźć funkcję $u\colon [0, \pi]^2 \to \mathbb{R}$ taką, że

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{w } (0,\pi)^2, \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & \text{dla } y \in [0,\pi], \\ u(x,0) = x(\pi - x) & \text{dla } x \in [0,\pi], \\ u(x,\pi) = 0 & \text{dla } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Uwaga. Wiadomo (RRCz2), że dla ciągłego warunku brzegowego powyższy problem ma jednoznaczne rozwiązanie (np. z teorii Perrona – kwadrat $[0, \pi]^2$ spełnia warunek stożka).

PRACA DOMOWA

7. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcje:

a) $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\pi, \pi)$,

b) $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\pi, \pi)$,

c) $f(x) = x^3$ dla $x \in (-\pi, \pi)$,

d) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } -\pi < x \leqslant 0, \\ 6x & \text{dla } 0 < x < \pi, \end{cases}$

e) $f(x) = x \sin x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$,

f) $f(x) = x \cos x$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

g) $f(x) = x \cos x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$,

h) $f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{dla } -\pi < x < 0, \\ \cos x & \text{dla } 0 < x < \pi \end{cases}$

(dla każdej funkcji należy dookreślić wartości w odpowiednich punktach).

8. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = |\sin x|$ dla dowolnego x.

9. Funkcję $f(x) = 1 - x$ rozwinąć w przedziale $(0, 1)$ w szereg

a) cosinusów,

b) sinusów.

10. Funkcję $f(x) = \sin x$ rozwinąć w przedziale $(0, \pi)$ w szereg

a) cosinusów,

b) sinusów.

11. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcje:

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{dla } 1 \leqslant x < 2, \\ 3 - x & \text{dla } 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant x < \alpha, \\ \beta & \text{dla } \alpha < x < \pi - \alpha, \\ 0 & \text{dla } \pi - \alpha < x \leqslant \pi, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta x}{\alpha} & \text{dla } 0 \leqslant x < \alpha, \\ \beta & \text{dla } \alpha \leqslant x < \pi - \alpha, \\ \frac{\beta(\pi - x)}{\alpha} & \text{dla } \pi - \alpha \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{4} & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

gdzie $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i $\beta \in \mathbb{R}$ (dla każdej funkcji należy rozszerzyć funkcję do przedziału symetrycznego oraz dookreślić wartości w odpowiednich punktach).

12. Znaleźć funkcję $u\colon [0, \pi]^2 \to \mathbb{R}$ taką, że

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{w } (0, \pi)^2, \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 & \text{dla } x \in [0, \pi], \\ u(0, y) = g(y) & \text{dla } y \in [0, \pi], \\ u(\pi, y) = 0 & \text{dla } y \in [0, \pi], \end{cases} \qquad \text{gdzie} \qquad g(y) = \begin{cases} \frac{4x}{\pi} & \text{dla } 0 \leqslant y < \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{dla } \frac{\pi}{4} < y < \frac{3\pi}{4}, \\ \frac{4(\pi - x)}{\pi} & \text{dla } \frac{3\pi}{4} < y \leqslant \pi. \end{cases}$$

13. Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe dla jednorodnego równania przewodnictwa ciepła

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 \qquad \text{dla } t > 0,\ x \in (0,1),$$

z następującymi warunkami:

a) $u(t,0) = u(t,1) = 0$, $u(0,x) = 2x(1-x)$,

b) $u(t,0) = u(t,1) = 0$, $u(0,x) = x\cos\frac{\pi x}{2}$,

c) $u(t,0) = \alpha t$, $u(t,1) = \beta t$, $u(0,x) = 0$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
Wskazówka. Sprowadzić zagadnienie do zagadnienia z zerowymi warunkami brzegowymi rozważając pewną funkcję $w(t,x) = \alpha t + (\beta - \alpha)tx + C(x)$.

d) $u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0$, $u(0,x) = \sin^3(\pi x)$,
Wskazówka. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ oraz $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.

14. Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe dla niejednorodnego równania przewodnictwa ciepła

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) \qquad \text{dla } t > 0,\ x \in (0,1),$$

z następującymi danymi:

a) $f(t,x) = 2t(1-x)$, $u(t,0) = t^2$, $u(t,1) = 0$, $u(0,x) = x(1-x)$,

b) $f(t,x) = 2xt$, $u(t,0) = 0$, $u(t,1) = t^2$, $u(0,x) = x(1-x)$.

Wskazówka. Sprowadzić zagadnienie do zagadnienia dla jednorodnego RPC.

15. Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe dla jednorodnego równania falowego

$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 \qquad \text{dla } t > 0,\ x \in (0,1),$$

z następującymi warunkami:

a) $u(t,0) = u(t,1) = 0$, $u(0,x) = x(1-x)$, $u_t(0,x) = 0$,

b) $u(t,0) = t$, $u(t,1) = -t$, $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = 1 - 2x^2$.