5. TRANSFORMACJA FOURIERA #1

Będziemy oznaczać $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$ jako transformatę Fouriera funkcji f. Ponadto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Niech $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Wykazać, że

a) jeśli $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, to

$$\widehat{g}(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{e}^{-2\pi i \mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi});$$

b) jeśli $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^n$ i $g(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{2\pi i \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$, to

$$\widehat{g}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0),$$

a stąd jeśli $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^n$, $g_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cos(2\pi \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \mathbf{x})$ i $g_{\mathrm{s}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \sin(2\pi \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \mathbf{x})$, to

$$\widehat{g_{\mathrm{c}}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) + \widehat{f}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}_0)\right), \qquad \widehat{g_{\mathrm{s}}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2i}\left(\widehat{f}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) - \widehat{f}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}_0)\right);$$

c) jeśli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest nieosobliwa i $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x})$, to

$$\widehat{g}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \widehat{f}(\mathbf{A}^{-T} \boldsymbol{\xi}),$$

gdzie $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^T)^{-1}$;

d) jeśli $g(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$, to

$$\widehat{g}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\widehat{f}(-\boldsymbol{\xi})},$$

gdzie $\overline{\cdot}$ jest sprzężeniem zespolonym; w szczególności jeśli $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, to

$$\widehat{f}(-\boldsymbol{\xi}) = \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})}.$$

W kolejnym zadaniu przyda się pojęcie funkcji *absolutnie ciągłej* (por. podręcznik *Analiza rzeczywista i zespolona* Rudina). Absolutna ciągłość funkcji $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ jest równoważna istnieniu pochodnej f' p.w., całkowalności tej pochodnej i zachodzeniu wzoru

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{dla } x \in [a, b].$$

2. Niech $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Wykazać, że

a) jeśli f jest absolutnie ciągła i $f' \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, to

$$(f')^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi \cdot \widehat{f}(\xi);$$

b) jeśli $xf \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, to

$$(-2\pi i x \cdot f)^\wedge(\xi) = \widehat{f}\,'(\xi).$$

3. Niech $\alpha > 0$. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| < \alpha, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } |x| = \alpha, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Uwaga. Funkcję daną powyższym wzorem oznacza się czasem symbolem $\mathbb{1}_{(-\alpha,\alpha)}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{dla } \alpha \leqslant x \leqslant 0, \\ -x + \alpha & \text{dla } 0 < x \leqslant \alpha, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Wskazówka. Wykazać, że f jest splotem funkcji prostokątnych i skorzystać z a) oraz wzoru $\widehat{u * v} = \widehat{u} \cdot \widehat{v}$ udowodnionego na wykładzie dla funkcji $u, v \in L^1(\mathbb{R})$.

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$,

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \alpha^2}$.

Wskazówka. Warto użyć metod analizy zespolonej całkując funkcję podcałkową (z def. transformaty Fouriera) po brzegu zbioru $D_R^+ = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \leqslant R, \operatorname{Im}(z) \geqslant 0\}$ dla $\xi < 0$ oraz po brzegu zbioru $D_R^- = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \leqslant R, \operatorname{Im}(z) \leqslant 0\}$ dla $\xi > 0$.