6. WŁASNOŚCI SPLOTU

1. Niech $f, g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ i niech $T_a\colon L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ będzie operatorem przesunięcia, tzn. $T_a f(x) = f(x-a)$. Wykazać, że

$$f * (T_a g) = (T_a f) * g = T_a(f * g).$$

2. Przypuśćmy, że istnieje funkcja $\delta \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ taka, że

$$\forall_{f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})} \quad f * \delta = f$$

(tzn. element neutralny splotu w $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$). Wykazać, że prowadzi to do sprzeczności z Lematem Riemanna-Lebesgue'a.

W dalszej części przyjmiemy następujące oznaczenia:

a) $\mathcal{C}_b(\mathbb{R};\mathbb{C})$ – zbiór funkcji ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}$;

b) $\mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ – zbiór funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ i znikających w nieskończoności;

c) $\mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$ – zbiór funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ o zwartym nośniku.

3. Niech $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Wykazać, że $f * g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

4. Niech $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ i $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Wykazać, że $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Wskazówka 1. Można udowodnić następujący fakt: jeśli $f_n \to f$ w $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ oraz $g_n \to g$ w $L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, to $f_n * g_n \to f * g$ w $L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, i wykorzystać go dla odpowiednich ciągów funkcji $f_n, g_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Następnie skorzystać z zadania 3 i faktu, że przestrzeń $\mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ jest domknięta w normie $L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Wskazówka 2. Można też inaczej: korzystając z faktu, że funkcje ciągłe i znikające w nieskończoności są jednostajnie ciągłe można pokazać, że przy założeniach zadania mamy $f * g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Aby pokazać, że $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ warto najpierw wziąć $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$ i pokazać tezę, a następnie skorzystać z gęstości $\mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$ w $\mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

5. Przeprowadzając rozumowanie jak w zadaniu 4 wykazać poniższe własności splotu.

a) Niech $1 < p, q < \infty$ będą takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wykazać, że jeśli $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ i $g \in L^q(\mathbb{R};\mathbb{C})$, to $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

b) Wykazać, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ i $g \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, to $f * g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Pokazać, że jeśli dodatkowo g ma zwarty nośnik, to wówczas $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$.