7. TRANSFORMACJA LAPLACE'A

We wszystkich zadaniach rozważamy jedynie funkcje $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, tzn. zakładamy, że funkcje są *wygaszone* dla $t < 0$, czyli $f = f \cdot \mathbb{1}$. Będziemy standardowo przyjmować oznaczenie $\mathscr{L}\{f\} = F$ jako transformatę Laplace'a funkcji f.

1. Niech $F = \mathscr{L}\{f\}$ będzie zbieżna w zbiorze Λ. Wykazać, że

a) jeśli $\alpha > 0$ i $g(t) = f(\alpha t)$, to

$$G(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \qquad \frac{s}{\alpha} \in \Lambda;$$

b) jeśli $\beta > 0$ i $g(t) = f(t-\beta)$, to

$$G(s) = \mathrm{e}^{-\beta s} F(s), \qquad s \in \Lambda;$$

c) jeśli $\beta < 0$ i $g(t) = f(t-\beta) \cdot \mathbb{1}(t)$, to

$$G(s) = \mathrm{e}^{-\beta s} \left(F(s) - \int_0^{-\beta} f(t) \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \right), \qquad s \in \Lambda;$$

d) jeśli $\sigma \in \mathbb{R}$ i $g(t) = \mathrm{e}^{-\sigma t} f(t)$, to

$$G(s) = F(s+\sigma), \qquad s + \sigma \in \Lambda.$$

2. Niech $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie podstawowym T i taką, że $F = \mathscr{L}\{f\}$ istnieje dla pewnego s_0 ($\operatorname{Re} s_0 > 0$). Wykazać, że wówczas dla $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$

$$F(s) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-sT}} \int_0^T f(t) \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t.$$

3. Wyznaczyć transformaty Laplace'a (i podać ich obszary zbieżności) następujących funkcji:

a) $\cosh(\beta t)$, $\beta \in \mathbb{R}$,

b) $\sinh(\beta t)$, $\beta \in \mathbb{R}$,

c) $\mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

d) $\mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

4. Korzystając z własności transformacji Laplace'a obliczyć transformatę funkcji

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{dla } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases} \qquad \omega > 0.$$

5. Niech $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^n((0,+\infty))$, $n \in \mathbb{N}$, i taka, że $F = \mathscr{L}\{f\}$ oraz $\mathscr{L}\{f^{(k)}\}$, $0 < k \leqslant n$, istnieją dla pewnego $s_0 \neq 0$. Wykazać, że dla $m \geqslant n$ i $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$

a) jeśli $g(t) = t^m f^{(n)}(t)$, to

$$G(s) = (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}s^m} \left(s^n F(s) \right);$$

b) jeśli $g(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left(t^m f(t) \right)$, to

$$G(s) = (-1)^m s^n F^{(m)}(s).$$

6. Wyznaczyć transformaty Laplace'a (i podać ich obszary zbieżności) następujących funkcji:

a) $t\cos(\beta t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, b) $t\sin(\beta t)$, $\beta \in \mathbb{R}$, c) $\ln t$.

7. Niech $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ będzie sumą/różnicą dwóch funkcji monotonicznych w otoczeniu $t > 0$ i niech $F = \mathscr{L}\{f\}$. Wykazać, że jeżeli funkcja F jest postaci $F(s) = \frac{P_k(s)}{Q_\ell(s)}$, gdzie P_k i Q_ℓ są wielomianami stopnia, odpowiednio, k i ℓ, $k < \ell$, to

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{s=s_i} \left(\mathrm{e}^{st} F(s)\right),$$

gdzie $s_1, \ldots, s_n$ są miejscami zerowymi wielomianu Q_ℓ.

8. Wyznaczyć (dowolną metodą) odwrotne transformaty Laplace'a następujących funkcji:

a) $\dfrac{s^2+s+1}{s^3+s}$, c) $\dfrac{1}{s(s-2)^2}$, e) $\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$,

b) $\dfrac{-s+1}{(s+1)(s^2+4s+13)}$, d) $\dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$, f) $\dfrac{1}{s(s+3)^3}$.

9. Stosując przekształcenie Laplace'a rozwiązać następujące zagadnienia początkowe:

a) $x''(t) + x'(t) + x(t) = 1 - 2\cos t, \quad x(0^+) = 1,\ x'(0^+) = -2,$

b) $x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 4t + 5, \quad x(0^+) = 2,\ x'(0^+) = -1,$

c) $x'(t) - 2\displaystyle\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0, \quad x(0^+) = 4,$

d) $x'(t) - x(t) + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = t, \quad x(0^+) = -1.$

10. Stosując przekształcenie Laplace'a rozwiązać następujące układy równań różniczkowych:

a) $x'(t) = x(t) + y(t) + \mathrm{e}^t,\ y'(t) = 3x(t) - y(t), \quad x(0^+) = y(0^+) = 0,$

b) $x'(t) + y(t) = 0,\ y'(t) - 2x(t) - 2y(t) = 0, \quad x(0^+) = y(0^+) = 1.$