8. REGULARYZACJA FUNKCJI, PRZESTRZEŃ FUNKCJI PRÓBNYCH i DYSTRYBUCJE

Niech $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ będzie nieujemna i taka, że $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$ (np. *czapeczka* ω zdefiniowana na wykładzie). Niech

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$$

(analogicznie dla ω_ε), wówczas $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ i $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$.

1. Niech $\{\varphi_\varepsilon \colon \varepsilon > 0\}$ będzie rodziną funkcji zdefiniowanych powyżej.

a) Wykazać, że jeśli $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, to $(f * \varphi_\varepsilon)(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} f(\mathbf{x})$.

b) Wykazać, że jeśli $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, to ciąg funkcji $f * \varphi_\varepsilon$ jest zbieżny jednostajnie do f przy $\varepsilon \to 0^+$.

2. Wykazać, że funkcje $f \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, $1 \leqslant p < \infty$, są p-średnio ciągłe, tzn.

$$\sup_{|\mathbf{y}|\leqslant\varepsilon} \|T_{\mathbf{y}} f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0,$$

gdzie $T_{\mathbf{y}}\colon L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ jest operatorem przesunięcia, tzn. $T_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$.
Uwaga. Nie można wykorzystywać w tym zadaniu gęstości $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ w $L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ (jest to własność wykorzystywana w dowodzie gęstości), można wykorzystać gęstość $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ w $L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

W dalszej części zakładamy, że $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym.

3. Niech $f \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Niech $f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$ (zakładamy, że f jest przedłużona zerem na całe $\mathbb{R}^n$). Pokazać, że

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega;\mathbb{C})} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{C})}\,.$$

4. Niech $f \in L^1(\Omega;\mathbb{C})$. Pokazać, że $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} f$ w $L^1(\Omega;\mathbb{C})$.

Niech $\mathcal{D}(\Omega)$ oznacza przestrzeń funkcji podstawowych (próbnych) na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, a $\mathcal{D}'(\Omega)$ oznacza przestrzeń dystrybucji, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Mówimy, że ciąg (φ_k) w $\mathcal{D}(\Omega)$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, jeśli

a) istnieje zbiór zwarty $K \subset \Omega$ taki, że $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

b) dla każdego wielowskaźnika α spełniony jest warunek

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_N \quad \forall_{k,\ell\geqslant N} \quad \|\mathrm{D}^\alpha\varphi_k - \mathrm{D}^\alpha\varphi_\ell\|_{L^\infty(K;\mathbb{C})} < \varepsilon.$$

5. Niech $\varphi \in \mathcal{D}$. Sprawdzić, czy poniższe ciągi są zbieżne w $\mathcal{D}$:

a) $\dfrac{\varphi(\mathbf{x})}{k}$, b) $\dfrac{\varphi(k\mathbf{x})}{k}$, c) $\dfrac{\varphi(\frac{\mathbf{x}}{k})}{k}$.

6. Wykazać, że $\mathcal{D}(\Omega)$ jest ciągowo zupełna (tzn. każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny).

7. Niech T będzie funkcjonałem na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ danym wzorem:

a) $\langle T,\varphi\rangle := \displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, b) $\langle T,\varphi\rangle := -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,

dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pokazać, że $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Niech (T_k) będzie ciągiem w $\mathcal{D}'(\Omega)$ i niech $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Mówimy, że (T_k) zbiega w $\mathcal{D}'(\Omega)$, jeśli

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \quad \lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \, .$$

Jest to tak naprawdę *-słaba zbieżność dla pary przestrzeni dualnych $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$.

8. Niech $\{\varphi_\varepsilon \colon \varepsilon > 0\}$ będzie rodziną funkcji zdefiniowanych wcześniej. Wykazać, że $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \delta$ w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, gdzie δ jest dystrybucją Diraca.

9. Wykaż, że zbieżność w $\mathcal{D}'(\Omega)$ ciągu dystrybucji regularnych generowanych przez funkcje lokalnie całkowalne f_k nie implikuje zbieżności punktowej (prawie wszędzie) ciągu funkcji f_k.
Wskazówka. Rozważ ciąg funkcji $f_k(x) = \mathrm{e}^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$.

10. Niech (f_k) będzie ciągiem w $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{C})$ i niech $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ będzie taka, że

a) dla prawie wszystkich $\mathbf{x} \in \Omega$ zachodzi $f(\mathbf{x}) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x})$,

b) dla każdego $K \Subset \Omega$ (tzn. zawartego w sposób zwarty: $K \subset \Omega$ i $\overline{K} \subset \Omega$) istnieje funkcja $g \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$ taka, że dla każdego k i prawie wszystkich $\mathbf{x} \in K$ zachodzi $|f_k(\mathbf{x})| \leqslant g(\mathbf{x})$.

Wykazać, że wówczas $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{C})$ i $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$ (rozumiejąc to jako zbieżność w $\mathcal{D}'(\Omega)$ dystrybucji regularnych generowanych przez funkcje lokalnie całkowalne).