9. RÓŻNICZKOWANIE DYSTRYBUCJI

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym.

1. Niech $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ i niech $h(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Wykazać, że $f = \mathrm{D}h$ (w sensie równości dystrybucji, a zatem też, że f jest słabą pochodną funkcji h).

2. Wyznaczyć $\mathrm{D}f$ oraz $\mathrm{D}^2 f$, gdzie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -x-\pi & \text{dla } -\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}, \\ \;\; x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ -x+\pi & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{dla } x < -\pi \text{ oraz } x > \pi, \end{cases}$$

Czy funkcje $\mathrm{D}f$ oraz $\mathrm{D}^2 f$ są lokalnie całkowalne (i czy istnieją w sensie słabej pochodnej)?

3. Wykazać, że $T = \mathrm{D}f$, gdzie $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ oraz $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

a) $\langle T, \varphi\rangle := \int_0^1 \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\qquad f(t) = \ln t \cdot \mathbb{1}(t)$;

b) $\langle T, \varphi\rangle := -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathbb{1}(t)$

(sprawdzenie, że faktycznie są to dystrybucje było zadaniem z poprzedniej listy).

4. Niech $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, będzie taka, że $\mathrm{D}^k f = 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wykazać, że f jest dystrybucją regularną generowaną przez pewien wielomian stopnia mniejszego niż k.

PRACA DOMOWA

5. Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i (f_k), (g_k) będą ciągami w $\mathcal{D}'(\Omega)$ oraz niech $\boldsymbol{\alpha}$ będzie dowolnym wielowskaźnikiem. Wykazać następujące własności różniczkowania dystrybucyjnego:

a) $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}(f+g) = \mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}} f + \mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}} g$;

b) $\forall_{c\in\mathbb{C}} \quad \mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}(cf) = c\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}} f$;

c) jeśli $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$, to $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}} f_k \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}} f$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$.

6. Niech $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$. Niech $\alpha f \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ będzie funkcjonałem zdefiniowanym wzorem

$$\forall_{\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)} \quad \langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha\varphi \rangle\,.$$

Wykazać, że

a) $\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$;

b) jeśli (f_k) jest ciągiem w $\mathcal{D}'(\Omega)$ i $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$, to $\alpha f_k \xrightarrow{k\to\infty} \alpha f$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$;

c) zachodzi wzór Leibniza, tzn. dla dowolnego wielowskaźnika $\boldsymbol{\beta}$

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}}(\alpha f) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\leqslant\boldsymbol{\beta}} \binom{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\nu}} \mathrm{D}^{\boldsymbol{\nu}}\alpha \mathrm{D}^{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\nu}} f,$$

gdzie

$$\binom{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\nu}} = \frac{|\boldsymbol{\beta}|!}{\nu_1!\cdots\nu_n!} \qquad \text{oraz} \qquad \boldsymbol{\nu} \leqslant \boldsymbol{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \forall_j \quad \nu_j \leqslant \beta_j.$$

7. Wyznaczyć $\mathrm{D}f$ oraz $\mathrm{D}^2 f$, gdzie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem:

a) $f(x) = \frac{1}{2}\,(1-|x|)^2$,

b) $f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{dla } x < -1, \\ x^2 & \text{dla } x > -1, \end{cases}$

Czy funkcje $\mathrm{D}f$ oraz $\mathrm{D}^2 f$ są lokalnie całkowalne (i czy istnieją w sensie słabej pochodnej)?

8. Niech $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ i niech f będzie dystrybucją generowaną przez $\alpha \cdot \mathbb{1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Wykazać, że

$$\mathrm{D}f = \alpha(0)\cdot\delta + \alpha' \cdot \mathbb{1},$$

gdzie przez $\alpha' \cdot \mathbb{1}$ rozumiemy dystrybucję generowaną przez tę funkcję.