10. FUNKCJE SZYBKO MALEJĄCE i DYSTRYBUCJE TEMPEROWANE

Niech $\mathcal{S}$ oznacza przestrzeń funkcji szybko malejących na $\mathbb{R}^n$, a $\mathcal{S}'$ przestrzeń funkcjonałów liniowych i ciągłych nad $\mathcal{S}$.

1. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

a) $\varphi \in \mathcal{S}$;

b) $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz dla dowolnego wielowskaźnika α i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi

$$|\mathbf{x}|^k \, |\mathrm{D}^\alpha \varphi(\mathbf{x})| \xrightarrow{|\mathbf{x}| \to \infty} 0;$$

c) $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz dla dowolnego wielowskaźnika α i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi

$$\exists_{M_{\alpha,k}} \quad \forall_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad |\mathrm{D}^\alpha \varphi(\mathbf{x})| \leqslant \frac{M_{\alpha,k}}{(1+|\mathbf{x}|)^k}.$$

2. Wykazać, że ciąg (φ_ℓ) zbiega do funkcji φ w $\mathcal{S}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wielowskaźnika α i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ciąg funkcji $|\mathbf{x}|^k \, \mathrm{D}^\alpha \varphi_\ell(\mathbf{x})$ zbiega jednostajnie do funkcji $|\mathbf{x}|^k \, \mathrm{D}^\alpha \varphi(\mathbf{x})$.

3. Wykazać, że dystrybucja Diraca jest temperowana.

4. Wykazać, że jeżeli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, to dystrybucja regularna zadana wzorem

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{S}} \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

jest temperowana.

5. Wykazać, że dla dowolnego wielowskaźnika α dystrybucja regularna zadana wzorem

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{S}} \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\alpha \varphi(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

jest temperowana.