11. TRANSFORMACJA FOURIERA #2 – DYSTRYBUCJE TEMPEROWANE

Niech $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$ oznacza transformatę Fouriera $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ponadto, dla dowolnego $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ zdefiniujmy operator $T_{\mathbf{x}_0} \colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ poprzez wzór

$$\forall_{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} \forall_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \quad \langle T_{\mathbf{x}_0} f, \varphi \rangle = \langle f, T_{-\mathbf{x}_0} \varphi \rangle,$$

gdzie $T_{\mathbf{x}_0}\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Niech $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wykazać, że

a) dla dowolnego wielowskaźnika α zachodzi: $(\mathrm{D}^\alpha f)\widehat{\ } = (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\alpha \widehat{f}$,

b) dla dowolnego wielowskaźnika α zachodzi: $\big((-2\pi i \mathbf{x})^\alpha f\big)\widehat{\ } = \mathrm{D}^\alpha \widehat{f}$,

c) dla dowolnego $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ zachodzi: $(T_{\mathbf{x}_0} f)\widehat{\ } = \mathrm{e}^{-2\pi i \mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}} \widehat{f}$,

d) dla dowolnego $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^n$ zachodzi: $(\mathrm{e}^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}_0} f)\widehat{\ } = T_{\boldsymbol{\xi}_0} \widehat{f}$.

Dla dowolnej $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, niech $\check{f}$ oznacza dystrybucję daną wzorem

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \quad \langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle,$$

gdzie $\check{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x})$.

2. Niech $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wykazać, że

a) $\big(\check{f}\,\big)\widehat{\ } = \big(\widehat{f}\,\big)\check{\ }$,

b) $(f)\widehat{\widehat{\ }} = \check{f}$.

3. Niech $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Wyznaczyć transformaty Fouriera dystrybucji temperowanych generowanych przez funkcje $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$:

a) $f(\mathbf{x}) = 1$,

b) $f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}_0}$,

c) $f(\mathbf{x}) = \cos(2\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}_0)$,

d) $f(\mathbf{x}) = \sin(2\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}_0)$.

4. Niech $P.V.\frac{1}{x}$ oznacza operator liniowy dany wzorem

$$\forall_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} \quad \langle P.V.\frac{1}{x}, \varphi \rangle = P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Wykazać, że $P.V.\frac{1}{x}$ jest dystrybucją temperowaną, a jej transformatą Fouriera jest dystrybucja generowana przez funkcję

$$F(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn} \xi.$$

5. Wykorzystując równość Plancherela obliczyć

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2}$,

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, \mathrm{d}x$.