12. FUNKCJE BESSELA

1. Wykazać, że funkcje Bessela I-go rodzaju J_ν, tzn.

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad x \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{Z},$$

są rozwiązaniami równania Bessela w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u(x) = 0.$$

2. Wykazać, że dla $\nu \in \mathbb{Z}$ oraz $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zachodzą poniższe własności

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$,

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$,

c) $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} J_\nu(x)$,

d) $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1} = 2J'_\nu(x)$.

3. Niech $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Rozwiązać zagadnienie dla funkcji $u = u(t,x,y)$:

a) stygnięcie walca:
$$\begin{aligned} &u_t = \Delta u \ \text{ dla } (x,y) \in \Omega,\ t > 0,\\ &u(t,x,y) = 0 \ \text{ dla } (x,y) \in \partial\Omega,\ t > 0,\\ &u(0,x,y) = 1 - (x^2+y^2) \ \text{ dla } (x,y) \in \Omega; \end{aligned}$$

b) stygnięcie walca:
$$\begin{aligned} &u_t = \Delta u \ \text{ dla } (x,y) \in \Omega,\ t > 0,\\ &u(t,x,y) = 0 \ \text{ dla } (x,y) \in \partial\Omega,\ t > 0,\\ &u(0,x,y) = 1 - (x^2+y^2)^2 \ \text{ dla } (x,y) \in \Omega; \end{aligned}$$

c) nagrzewanie powierzchni bocznej walca:
$$\begin{aligned} &u_t = \Delta u \ \text{ dla } (x,y) \in \Omega,\ t > 0,\\ &u(t,x,y) = V > 0 \ \text{ dla } (x,y) \in \partial\Omega,\ t > 0,\\ &u(0,x,y) = 0 \ \text{ dla } (x,y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Wskazówka. Warto w powyższych przykładach przejść do współrzędnych biegunowych i zastosować metodę rozdzielenia zmiennych.