

### 13. Z-TRANSFORMACJA

Rozważamy ciągi  $(f_n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , niech  $F(z) = Z\{f_n\}(z)$  oznacza Z-transformatę ciągu  $(f_n)$ .

1. Wyznaczyć Z-transformaty ciągów  $(f_n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , gdzie:

$$\text{a) } f_n = \delta_{n,m}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{b) } f_n = e^{\alpha n}, \alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{c) } f_n = \sin(\beta n), \beta \in \mathbb{R}_+,$$

gdzie  $\delta_{n,m}$  jest deltą Kroneckera (tzn.  $\delta_{n,m} = 1$  dla  $n = m$  oraz  $\delta_{n,m} = 0$  dla  $n \neq m$ ).

2. Wyznaczyć wzór rekurencyjny na Z-transformatę ciągu  $g_n = \Delta^k f_n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

3. Wykazać, że jeśli  $F(z) = Z\{f_n\}(z)$  dla  $|z| > r$ , to  $Z\{n \cdot f_n\}(z) = -z \frac{d}{dz} F(z)$  (również dla  $|z| > r$ ).

4. Korzystając z własności Z-transformacji, wyznaczyć transformaty ciągów  $(f_n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , gdzie:

$$\text{a) } f_n = n^2, \quad \text{b) } f_n = n^3, \quad \text{c) } f_n = \binom{n+m-1}{m-1}, m \in \mathbb{Z}_+.$$

5. Wyznaczyć odwrotną Z-transformatę funkcji:

$$\text{a) } F(z) = \frac{z+2}{z+1}, \quad \text{b) } F(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z+3)}, \quad \text{c) } F(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-3)^2}.$$

6. Rozwiązać następujące równania różnicowe przy zadanych warunkach początkowych:

$$\text{a) } x_{n+1} - x_n = 1, \quad x_0 = 0,$$

$$\text{b) } x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad x_0 = x_1 = 2,$$

$$\text{c) } x_{n+2} + 2x_{n+1} - 8x_n = n \cdot 2^n, \quad x_0 = 0, x_1 = 1.$$