1-2. Podstawy metody różnic skończonych – przypomnienie

⋆ *przerabiane na zajęciach*: 8 i 15 października 2018

† *do oddania*: 29 października 2018

(L) Zadanie 1. Zastosuj metodę Eulera do zagadnienia początkowego

$$x'(t) = -x(t) \cdot \cos t \quad \text{dla } t \in (0, 8\pi) \qquad \text{oraz} \qquad x(0) = 1,$$

przyjmując $h = \frac{\pi}{8}$. Porównaj otrzymany wynik z rozwiązaniem analitycznym. Czy przybliżenie poprawia się przy zmniejszaniu długości kroku (np. do $h = \frac{\pi}{128}$)?

(L) Zadanie 2. Zastosuj metodę TS(1) oraz TS(2) do omawianych na zajęciach zagadnień początkowych:

(**1**) $x'(t) = (1 - 2t)x(t)$ dla $t > 0$ i $x(0) = 1$,

(**2**) $x'(t) = 1 + t - x(t)$ dla $t > 0$ i $x(0) = 0$,

(**3**) $u'(t) = v(t)$, $v'(t) = t - u(t)$ dla $t > 0$ i $u(0) = 1$, $v(0) = 2$.

Oceń działanie obu metod dla $h = 0{,}3$, $h = 0{,}15$ i $h = 0{,}075$, rozwiązując równanie dla $0 \leqslant t \leqslant 3$ i porównując otrzymane przybliżenie z rozwiązaniem analitycznym. Na podstawie uzyskanych wyników oszacuj rząd zbieżności metody.

(L) Zadanie 3. Zastosuj metodę Eulera do zagadnienia początkowego

$$x'(t) = \lambda(x(t) - \sin t) + \cos(t), \qquad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Przyjmij $\lambda = 0{,}2$ i wykaż (porównując z rozwiązaniem analitycznym i dobierając odpowiednie wartości kroku h), że metoda Eulera daje $\mathrm{LE} = \mathcal{O}(h^2)$, ale już niestety $\mathrm{GE} = \mathcal{O}(h)$.

(L) Zadanie 4. Rozważ zagadnienie początkowe

$$u_t(t,x) + u_{xxx}(t,x) = f(t,x), \qquad u(0,x) = u_0(x).$$

Aby znaleźć jego numeryczne rozwiązanie, wykorzystaj (zgodny) schemat różnicowy

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + \frac{u_{m+2}^n - 3u_{m+1}^n + 3u_m^n - u_{m-1}^n}{h^3} = f_m^n.$$

Dobierz odpowiednio warunek początkowy (o (niemal) zwartym nośniku, by można było zadać zerowe wartości brzegowe, np. $u_0(x) = \exp(-x^2)$) i oszacuj (eksperymentalnie) dla jakich nieujemnych wartości stałej $\nu = \frac{k}{h^3}$ schemat jest stabilny.