3-4. Hiperboliczne równania cząstkowe

$\star$ *przerabiane na zajęciach*: 29 października 2018, 5 listopada 2018

† *do oddania*: 19 listopada 2018

(L) Zadanie 1. Rozwiąż zagadnienie $u_t + u_x = 0$, $x \in [-1, 1]$, $t \in [0, 1.2]$ z warunkiem początkowym $u(0, x) = \sin 2\pi x$ i okresowym warunkiem brzegowym, tzn. $u(t, 1) = u(t, -1)$. Użyj dwóch metod:

(**1**) schematu *forward-time backward-space* z $\lambda = 0.8$,

(**2**) schematu Laxa-Wendroffa z $\lambda = 0.8$.

Pokaż, że rozwiązanie uzyskane w (**1**) jest rzędu 1, a rozwiązanie uzyskane w (**2**) jest rzędu 2 używając w obliczeniach $h = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{40}$ i $\frac{1}{80}$.

(L) Zadanie 2. Rozwiąż problem początkowo-brzegowy

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in [0, 1],\ t \geqslant 0, \qquad u(0, x) = \sin 2\pi x, \quad x \in [0, 1],$$

schematem *leapfrog* i poniższymi warunkami brzegowymi:

(**1**) $u(t, 0)$ – zadane wzorem, $u(t, 1)$ – schemat $u_M^{n+1} = 2u_{M-1}^{n+1} - u_{M-2}^{n+1}$,

(**2**) $u(t, 0)$ – zadane wzorem, $u(t, 1) = 0$,

(**3**) $u(t, 0)$ – schemat $u_0^{n+1} = 2u_1^{n+1} - u_2^{n+1}$, $u(t, 1)$ – schemat $u_M^{n+1} = u_{M-1}^{n}$,

(**4**) $u(t, 0)$ – zadane wzorem, $u(t, 1)$ – schemat $u_M^{n+1} = u_{M-1}^{n}$.

Użyj parametrów $h = 0.02$, $\lambda = 0.9$. Tylko jeden z tych schematów powinien dać dobry wynik, który?

(L) Zadanie 3. Rozwiąż równanie

$$u_t + (1 + \alpha x)u_x = 0$$

na przedziale $[-3, 3]$ i $t \in [0, 2]$ używając schematu Laxa-Friedrichsa dla $\alpha = -0.5$ i $\lambda = 1$. Zademonstruj, że niestabilność schematu pojawia się dopiero, gdy $|(1 + \alpha x_m)\lambda| > 1$.

(L) Zadanie 4. Rozwiąż układ równań

$$
\begin{aligned}
u_t + \frac{1}{3}(t-2)u_x + \frac{2}{3}(t+1)v_x + \frac{1}{3}u = 0,\\
v_t + \frac{1}{3}(t+1)u_x + \frac{1}{3}(2t-1)v_x - \frac{1}{3}v = 0,
\end{aligned}
$$

stosując schemat *Laxa-Friedrichsa*. Warunki początkowe są postaci

$$
\begin{aligned}
u(0,x) &= \max\{0, 1-|x|\},\\
v(0,x) &= \max\{0, 1-2|x|\}.
\end{aligned}
$$

Rozważ wartości $x \in [-3,3]$ oraz $t \in [0,2]$. Niech $h = \frac{1}{20}$ oraz $\lambda = \frac{1}{2}$. Na obu brzegach niech $u = 0$ oraz v niech będzie równe wartości v w punkcie siatki odległym o 1 od brzegu. Opisz zachowanie rozwiązania dla $t \in [1.5, 2]$ (przyda się narysowanie tego rozwiązania). Układ rozwiąż w podanej formie, nie próbuj go diagonalizować).

(L) Zadanie 5. Zaimplementuj algorytm Thomasa rozwiązywania trójdiagonalnych liniowych układów równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$, gdzie

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & b_n
\end{pmatrix}, \qquad
\mathbf{d} = \begin{pmatrix}
d_1\\ d_2\\ d_3\\ \vdots\\ d_{n-2}\\ d_{n-1}\\ d_n.
\end{pmatrix}
$$

Implementacja ma mieć postać funkcji

```
function x = Thomas(a, b, c, d),
```

gdzie $\mathtt{a} = (0, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)^T$, $\mathtt{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n)^T$, $\mathtt{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 0)^T$ i $\mathtt{d} = \mathbf{d}$.

(L) Zadanie 6. Rozwiąż problem początkowo-brzegowy omawiany w zadaniu 2 schematem Cranka-Nicolsona. Zbadaj zachowanie rozwiązań dla różnych warunków brzegowych.