7-9. Równania drugiego rzędu – paraboliczne i hiperboliczne

⋆ *przerabiane na zajęciach*: 3 i 4 grudnia 2018

† *do oddania*: 17 grudnia 2018

(L) Zadanie 1. Rozwiąż zagadnienie początkowo brzegowe

$$u_t = bu_{xx}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad u(0,x) = u_0(x),$$

gdzie

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{jeśli } |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{jeśli } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rozwiąż zagadnienia aż do $t = \frac{1}{2}$. Warunek brzegowy i dokładne rozwiązanie są zadane przez szereg

$$u(t,x) = \frac{1}{2} + 2\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\frac{\cos \pi(2\ell+1)x}{\pi(2\ell+1)}e^{-\pi^2(2\ell+1)^2 t}.$$

Użyj schematu Cranka-Nicolsona z $h = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ oraz $\frac{1}{40}$.

Porównaj dokładność i efektywność metody w dwóch przypadkach: dla $\lambda = 1$ i $\mu = 10$. Pokaż ponadto, że jeśli λ jest stała, to błąd rozwiązania mierzony w normie supremum nie zmniejsza się, ale błąd mierzony w normie L^2 zmniejsza się.

(L) Zadanie 2. Zaimplementuj schemat *forward-time central-space* rozwiązywania równania konwekcji-dyfuzji

$$u_t + au_x = bu_{xx},$$

gdzie $b = 0{,}1$ i $a = 10$ (dobierz odpowiednie warunki brzegowe i warunek początkowy). Zaobserwuj oscylacje, które pojawiają się po złamaniu warunku $h \leqslant \frac{2b}{a}$ (zbadaj zachowanie się rozwiązania dla $h = \frac{1}{40}$ i $h = \frac{1}{60}$, dobierając jednocześnie μ tak, by schemat był stabilny). Następnie zastosuj schemat ze zmodyfikowaną różnicą skończoną dla składnika konwekcyjnego i zaobserwuj różnice między wynikami.