ANALIZA HIPERZESPOLONA W ŚRODOWISKU MATHEMATICA

Łukasz Błaszczyk

Streszczenie: Przedmiotem artykułu są obliczenia w algebrach hiperzespolonych, w szczególności w algebrze oktonionów. Przedstawiona została konstrukcja algebr hiperzespolonych Cayley'a-Dicksona oraz ich podstawowe własności. Sformułowano również pojęcie oktonionowej transformaty Fouriera oraz wskazano jej pewne własności, analogiczne do tych znanych z klasycznej analizy fourierowskiej. Efektem rozważań teoretycznych jest implementacja pakietu do obliczeń symbolicznych w środowisku Mathematica, umożliwiającego pracę w algebrze oktonionów.

Słowa kluczowe: oktoniony, algebry hiperzespolone, oktonionowa transformata Fouriera, Mathematica

1. Wstęp

Nie można wyobrazić sobie współczesnej matematyki, a nawet nauk technicznych, bez pojęcia liczby zespolonej. Jednostka urojona $\mathbf{i}$, o „magicznej" własności $\mathbf{i}^2 = -1$, wprowadzona przez Leonharda Eulera w 1748 roku za pomocą wzoru

$$\exp(\mathbf{i}\varphi) = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi,$$

zrewolucjonizowała wiele dziedzin nauki i techniki, ułatwiając m.in. analizę obwodów elektrycznych. Niemal sto lat później, w 1843 roku, pojęcie liczby zespolonej doczekało się uogólnienia w postaci liczb hiperzespolonych. Sir William R. Hamilton, uderzony swoim odkryciem, wyrył w kamieniu na moście Broome w Dublinie słynny napis $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$, definiując tym samym algebrę kwaternionów [Hamilton 1847]. Od tamtej pory algebry liczb hiperzespolonych stały się obiektem zainteresowania zarówno matematyków jak i inżynierów, i znalazły zastosowanie w wielu dziedzinach nauki.

W obecnych czasach wszelkie obliczenia (numeryczne i symboliczne) wymagają użycia specjalistycznego oprogramowania. Obliczenia na liczbach rzeczywistych i zespolonych są naturalne, a środowiska obliczeniowe takie jak MATLAB czy Mathematica oferują doskonałe narzędzia do pracy z tymi liczbami. Na przestrzeni ostatnich lat zaczęły pojawiać się również pakiety funkcji do obliczeń w algebrze kwaternionów, czyli najmniejszej znanej algebrze liczb hiperzespolonych. Wciąż jednak nie ma efektywnych narzędzi do wykonywania obliczeń w algebrze oktonionów, tzn. liczb postaci

(1) $$o = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + r_2 \cdot \mathbf{e}_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_3 + r_4 \cdot \mathbf{e}_4 + r_5 \cdot \mathbf{e}_5 + r_6 \cdot \mathbf{e}_6 + r_7 \cdot \mathbf{e}_7, \qquad r_0, \ldots, r_7 \in \mathbb{R},$$

gdzie $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7$ są kolejnymi jednostkami urojonymi, czy też w algebrach wyższych rzędów (np. sedenionach). Rozwój analizy hiperzespolonej, zwłaszcza metod analizy fourierowskiej, sprawia, że takie narzędzia są potrzebne, a ich obecność w znacznym stopniu ułatwiłaby skomplikowane i żmudne obliczenia.

Celem tego artykułu jest zaprezentowanie dotychczasowych osiągnięć w dziedzinie teorii sygnałów hiperzespolonych oraz wprowadzenie nowego typu danych w środowisku Mathematica, jakim są liczby oktonionowe. Na początku przedstawione zostaną podstawowe definicje i własności dotyczące algebr liczb hiperzespolonych, wraz z konstrukcją Cayley'a-Dicksona. Następnie wprowadzone zostaną podstawowe funkcje oktonionowe takie jak funkcja eksponencjalna czy funkcje trygonometryczne. Doprowadzi to do uogólnienia pojęcia transformaty Fouriera na algebrę oktonionów. Sformułowane zostaną ponadto niedawno wykazane własności oktonionowej transformaty Fouriera. Ostatnią częścią tego artykułu będzie pokazanie możliwości pakietu Octonions, który umożliwia pracę na liczbach oktonionowych w środowisku Mathematica.

Praca ta została zainspirowana dostępnym w środowisku Mathematica pakiecie Quaternions [Falcão, Miranda 2011], który daje analogiczne możliwości obliczeń na liczbach kwaternionowych.

2. Opis zagadnienia

Liczby hiperzespolone

Algebry liczb hiperzespolonych powstają jako efekt iteracyjnej konstrukcji, wprowadzonej przez Cayley'a-Dicksona [Dickson 1919]. Są to algebry rzędu 2^N, $N \in \mathbb{N}$, nad ciałem $\mathbb{R}$ i każda algebra rzędu 2^N powstaje z algebry rzędu 2^{N-1}. Podstawą konstrukcji Cayley'a-Dicksona jest przedstawienie dowolnego elementu algebry rzędu 2^N jako pary elementów algebry rzędu 2^{N-1}.

Za najmniejszą możliwą algebrę liczb hiperzespolonych można uznać ciało ***liczb zespolonych*** $\mathbb{C}$. Jest to algebra rzędu 2^1, a każdą liczbę zespoloną $z = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{i}$ można przedstawić jako parę liczb rzeczywistych, tzn. $z = (r_0, r_1)$. Działania w algebrze liczb zespolonych definiuje się w sposób naturalny, a mnożenie (przemienne, łączne i rozdzielne względem dodawania) wykonuje się pamiętając jedynie o fakcie, że $\mathbf{i}^2 = -1$.

Algebrą wyższego rzędu (tzn. 2^2) jest ciało nieprzemienne ***liczb kwaternionowych*** $\mathbb{H}$. Każdy kwaternion to liczba postaci

$$q = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + r_2 \cdot \mathbf{e}_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_3, \qquad r_0, \ldots, r_3 \in \mathbb{R},$$

gdzie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ to kolejne jednostki urojone (bardzo często oznaczane symbolami $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$), których mnożenie ma własności

(2) $$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1.$$

Każdy kwaternion można zapisać jako parę liczb zespolonych $q \simeq (z_0, z_1)$, tzn. w postaci $q = z_0 + z_1 \cdot \mathbf{e}_2$, gdzie $z_0 = r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1$ oraz $z_1 = r_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_1$. Należy zwrócić uwagę na fakt, że mnożenie kwaternionów (w przeciwieństwie do mnożenia liczb rzeczywistych i zespolonych) nie jest przemienne. Jest to jednak działanie łączne, ponadto każdy niezerowy element tej algebry ma element odwrotny.

Ostatnią algebrą, która będzie poruszona w tej pracy, jest algebra ***oktonionów*** $\mathbb{O}$, tzn. algebra rzędu 2^3. Są to liczby postaci (1), w których występuje aż siedem różnych jednostek urojonych. Podobnie jak poprzednio, oktoniony można przedstawić jako pary kwaternionów $o = (q_0, q_1)$, tzn. $o = q_0 + q_1 \cdot \mathbf{e}_4$, gdzie q_0 oraz q_1 to odpowiednie kwaterniony. Mnożenie oktonionów jest działaniem dość skomplikowanym, opartym na zasadach podobnych do (2), jednak rozszerzonych o kolejne jednostki urojone. Podobnie jak mnożenie kwaternionów, mnożenie oktonionów nie jest przemienne, nie jest jednak też łączne. Jedyną własnością, która zachowała się w procesie konstrukcji jest istnienie elementu odwrotnego dla każdego niezerowego oktonionu.

Działania w algebrach liczb hiperzespolonych można definiować osobno dla każdej algebry, jednak proces konstrukcji Cayley'a-Dicksona daje proste i eleganckie formuły. Są one oparte na zapisie elementu algebry hiperzespolonej jako pary elementów algebry niższego rzędu. Niektóre działania opisane za pomocą tej konstrukcji zostały przedstawione w tab. 1. Wszystkie te działania są naturalnym uogólnieniem działań znanych dla liczb zespolonych. W dalszej części artykułu największy nacisk zostanie położony na algebrę oktonionów.

Tab.1. Działania w algebrach Cayley'a-Dicksona, element X algebry rzędu 2^N jest przedstawiony jako para (x_0, x_1) elementów algebry rzędu 2^{N-1}.

działanie	*definicja*
dodawanie	$(x_0, x_1) + (y_0, y_1) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1)$
element neutralny dodawania	$(0, 0)$
element przeciwny	$-(x_0, x_1) = (-x_0, -x_1)$
sprzężenie	$(x_0, x_1)^* = (x_0^*, -x_1)$
mnożenie	$(x_0, x_1) \cdot (y_0, y_1) = (x_0 \cdot y_0 - y_1^* \cdot x_1, y_1 \cdot x_0 + x_1 \cdot y_0^*)$
element neutralny mnożenia	$(1, 0)$
moduł	$\lVert (x_0, x_1) \rVert = (\lVert x_0 \rVert^2 + \lVert x_1 \rVert^2)^{1/2}$
element odwrotny	$(x_0, x_1)^{-1} = (x_0, x_1)^* \cdot \lVert (x_0, x_1) \rVert^{-1}$

Funkcje oktonionowe

Wśród podstawowych pojęć analizy matematycznej znajdują się funkcje elementarne, takie jak funkcja eksponencjalna czy funkcje trygonometryczne. W analizie rzeczywistej i zespolonej definiuje się je na wiele równoważnych sposobów, m.in. jako sumy pewnych szeregów potęgowych. W ten sam sposób postępuje się w analizie kwaternionowej i oktonionowej [Morais 2014]. Przytoczone zostaną jedynie wersje oktonionowe tych funkcji.

Niech $o \in \mathbb{O}$. Funkcję eksponencjalną zmiennej oktonionowej o definiuje się jako

$$e^o = \exp(o) := o^0 / 0! + o^1 / 1! + o^2 / 2! + o^3 / 3! + \ldots.$$

W analizie kwaternionowej i oktonionowej funkcja eksponencjalna ma bardzo ciekawą własność. Wzór

$$\exp(o_0 + o_1) = \exp(o_0) \cdot \exp(o_1)$$

jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy, gdy mnożenie tych dwóch wybranych oktonionów jest przemienne, tzn. $o_0 \cdot o_1 = o_1 \cdot o_0$. Równość ta zachodzi tylko gdy oba oktoniony są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi, albo zawierają jedną (tą samą) jednostkę urojoną i część rzeczywistą. Ponadto, zapisując oktonion o za pomocą jego części rzeczywistej $\mathrm{Re}(o) := r_0$ i urojonej $\mathbf{o} = \mathrm{Im}(o) := r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + r_2 \cdot \mathbf{e}_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_3 + r_4 \cdot \mathbf{e}_4 + r_5 \cdot \mathbf{e}_5 + r_6 \cdot \mathbf{e}_6 + r_7 \cdot \mathbf{e}_7$, a także wprowadzając tzw. funkcję znaku oktonionu $\mathrm{sgn}(o) := o / \lVert o \rVert$, otrzymuje się wzór znany z analizy zespolonej

$$\exp(o) = e^{\mathrm{Re}(o)} (\cos \lVert \mathbf{o} \rVert + \mathrm{sgn}(\mathbf{o}) \cdot \sin \lVert \mathbf{o} \rVert).$$

Naturalną konsekwencją tej równości jest uogólnienie wzoru Moivre'a na dowolną całkowitą potęgę liczby oktonionowej.

Funkcje trygonometryczne zmiennej oktonionowej definiujemy w analogiczny sposób, za pomocą szeregów znanych z analizy rzeczywistej. Korzystając jednak z tych definicji można wyprowadzić znane wzory

$$\sin(o) = -\mathrm{sgn}(\mathbf{o}) \cdot (e^{o \cdot \mathrm{sgn}(\mathbf{o})} - e^{-o \cdot \mathrm{sgn}(\mathbf{o})}) / 2,$$

$$\cos(o) = (e^{o \cdot \mathrm{sgn}(\mathbf{o})} - e^{-o \cdot \mathrm{sgn}(\mathbf{o})}) / 2.$$

Powyższe definicje pozwalają na wprowadzenie wszelkich innych funkcji elementarnych (np. funkcji potęgowej dla dowolnego wykładnika oktonionowego, czy logarytmicznej). Każda z tych funkcji jest naturalnym uogólnieniem funkcji zmiennej rzeczywistej i zespolonej (oraz kwaternionowej).

Oktonionowa transformata Fouriera

Ważnym narzędziem analizy sygnałów rzeczywistych i zespolonych jest transformata Fouriera. Dzięki niektórym własnościom, zwłaszcza dualności splotu i mnożenia, transformata Fouriera stała się podstawowym narzędziem opisu i analizy stacjonarnych systemów liniowych. Pojęcie to można uogólnić na algebry wyższych rzędów. Znane i dobrze zbadane są własności kwaternionowej transformaty Fouriera funkcji dwóch zmiennych, która znalazła zastosowanie m.in. w analizie obrazów kolorowych czy w znakowaniu wodnym [Snopek 2013].

Transformatę Fouriera uogólnia się również na przypadek algebry oktonionów. Niech $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją trzech zmiennych o wartościach rzeczywistych. Oktonionową transformatę Fouriera (ang. *Octonion Fourier Transform* – OFT) funkcji u definiuje się jako

$$U(f_1, f_2, f_3) = \iiint_{\mathbb{R}^3} u(x_1, x_2, x_3)\, e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1}\, e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2}\, e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

i mnożenie oktonionów w powyższej całce odbywa się od lewej do prawej. Prawdziwy jest również wzór na transformatę odwrotną, tzn.

$$u(x_1, x_2, x_3) = \iiint_{\mathbb{R}^3} U(f_1, f_2, f_3)\, e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3}\, e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2}\, e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1}\, df_1\, df_2\, df_3.$$

W literaturze nie pojawiają się informacje na temat oktonionowej transformaty Fouriera, jednak prawdziwe są pewne własności analogiczne do tych, które są znane dla klasycznej transformaty Fouriera i transformaty kwaternionowej. W szczególności prawdziwe jest Twierdzenie o symetrii

$$U(-f_1, f_2, f_3) = (\alpha_6 \circ \alpha_4 \circ \alpha_2)(U(f_1, f_2, f_3)),$$
$$U(f_1, -f_2, f_3) = (\alpha_5 \circ \alpha_4 \circ \alpha_1)(U(f_1, f_2, f_3)),$$
$$U(f_1, f_2, -f_3) = (\alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1)(U(f_1, f_2, f_3)),$$

gdzie $\alpha_i(o) = -\,\mathbf{e}_i \cdot o \cdot \mathbf{e}_i$, dla $i = 1, \ldots, 7$, są inwolucjami, a $\circ$ oznacza złożenie funkcji. Prawdziwe są również odpowiedniki twierdzeń o modulacji, o przesunięciu czy o transformacie pochodnej.

Pakiet *Octonions*

Środowisko Mathematica oferuje pakiet *Quaternions*, w którym zaimplementowane zostały funkcje obsługujące nowy format liczb, tzn. kwaterniony [Falcão, Miranda 2011]. Nadpisane zostały metody charakterystyczne dla liczb zespolonych, które uogólnia się na algebry kwaternionów. Stanowiło to inspirację do przygotowania pakietu *Octonions*, który obsługuje algebrę oktonionów.

Oktoniony stanowią w tym pakiecie odrębną strukturę liczb, wywoływaną jako ósemka liczb rzeczywistych:

`Octonion[x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7].`

Struktura została zdefiniowana w taki sposób, by możliwe było również odwołanie się do zmiennej typu `Octonion` jak do listy.

Stworzenie nowej struktury danych wymagało zaimplementowania podstawowych działań, tzn. dodawania (przeciążony operator `+`) i mnożenia. W tym przypadku przeciążono symbol nieprzemiennego mnożenia `**` obecnego również w pakiecie *Quaternions*. Istotne w tym przypadku było również nadanie własności braku łączności w przypadku tego działania. Dodatkowo zaimplementowano możliwość dodawania i mnożenia przez jednostki urojone dostępne w formacie `E1`, `E2`, …, `E7`. Pozwala to na automatyczne wygenerowanie tabelki mnożenia oktonionów. Efekt zaprezentowano na ryc. 1. W pakiecie dostępnych jest również wiele funkcji podstawowych, znanych z pakietu *Quaternions*. Listę dostępnych funkcji zamieszczono w tab. 2.

Tab.2. Funkcje dostępne w pakiecie Octonions.

funkcja	*działanie*
`Octonion[x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7]`	konstruktor obiektu typu `Octonion`
`Conjugate[o]`	liczba sprzężona
`Abs[o]`	moduł
`Norm[o]`	kwadrat modułu
`Re[o]`	część rzeczywista
`Im[o]`	część urojona
`Sign[o]`	znak oktonionu
`AbsE17[o]`	moduł części urojonej
`SignE17[o]`	znak części urojonej
`Divide[o1,o2]`	dzielenie dwóch oktonionów
`Exp[o]`	funkcja eksponencjalna
`Sin[o]`	funkcja sinus
`Cos[o]`	funkcja cosinus
`Integrate[u,{x,a,b}]`	całkowanie funkcji `u` zmiennej `x` w przedziale (`a`, `b`)

	1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
1	1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
E1	E1	-1	E3	-E2	E5	-E4	-E7	E6
E2	E2	-E3	-1	E1	E6	E7	-E4	-E5
E3	E3	E2	-E1	-1	E7	-E6	E5	-E4
E4	E4	-E5	-E6	-E7	-1	E1	E2	E3
E5	E5	E4	-E7	E6	-E1	-1	-E3	E2
E6	E6	E7	E4	-E5	-E2	E3	-1	-E1
E7	E7	-E6	E5	E4	-E3	-E2	E1	-1

Ryc. 1. Tabelka mnożenia oktonionów.

W celach wizualnych zaimplementowano również możliwość wyświetlania oktonionu w formie analogicznej do liczby zespolonej, tzn. jako ósemki liczb rzeczywistych z odpowiednimi jednostkami urojonymi. Odpowiada za to funkcja FromOctonion, a jej przykładowe użycie pokazano na ryc. 2.

```
In[229]:= x = Octonion[r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7];
          FromOctonion[x]
```

$$\text{Out[230]=}\quad r_0 + E1\, r_1 + E2\, r_2 + E3\, r_3 + E4\, r_4 + E5\, r_5 + E6\, r_6 + E7\, r_7$$

Ryc. 2. Przykładowe wywołanie funkcji `FromOctonion`.

Ważną częścią pakietu *Octonions* jest implementacja oktonionowej transformaty Fouriera funkcji rzeczywistych 3 zmiennych. Działa ona w sposób symboliczny (a więc tylko dla tych funkcji, dla których środowisko Mathematica potrafi obliczyć całkę Fouriera w sensie klasycznym). Transformata wywoływana jest komendą `OFT[u,x,f]`, gdzie `u` jest funkcją trzech zmiennych, których nazwy zawarte są w wektorze (3-elementowym) `x`, a `f` to wektor (3-elementowy) nazw trzech zmiennych częstotliwościowych. Przykładowe wywołanie funkcji `OFT` zaprezentowano na ryc. 3. Pakiet *Octonions*, przygotowany w środowisku Mathematica w wersji 10.0 można obecnie pobrać ze strony internetowej autora tego artykułu:

www.ire.pw.edu.pl/~lblaszcz/nauka/CS.html.

```
In[235]:= f[x1_, x2_, x3_] = Exp[-((x1)^2 + (x2)^2 + (x3)^2)] (Cos[x1] + Sin[x2]);

In[236]:= F[f1_, f2_, f3_] = OFT[f[x1, x2, x3], {x1, x2, x3}, {f1, f2, f3}];

In[237]:= FromOctonion[F[f1, f2, f3]]
```

$$\text{Out[237]=}\quad \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}-\pi\left(f_1+\pi\left(f_1^2+f_2^2+f_3^2\right)\right)} \pi^{3/2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}+2\pi f_1-\pi\left(f_1+\pi\left(f_1^2+f_2^2+f_3^2\right)\right)} \pi^{3/2} + E2\left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}-\pi\left(f_2+\pi\left(f_1^2+f_2^2+f_3^2\right)\right)} \pi^{3/2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}+2\pi f_2-\pi\left(f_2+\pi\left(f_1^2+f_2^2+f_3^2\right)\right)} \pi^{3/2}\right)$$

Ryc. 3. Przykładowe wywołanie funkcji `OFT`.

3. Podsumowanie

Ze względu na brak pewnych własności mnożenia (przemienności i łączności) operacje w algebrze oktonionów stają się bardzo skomplikowane. Zaimplementowanie pakietu do obliczeń symbolicznych w środowisku Mathematica sprawia, że część z tych obliczeń ulega znacznego uproszczeniu i przyspieszeniu. Zmniejsza to również ryzyko popełnienia błędów wynikających z licznych indeksów. Badanie własności oktonionowej transformaty Fouriera, które do tej pory pozostają nieodkryte, staje się dzięki temu prostsze i efektywniejsze.

Pakiet w obecnej formie będzie się jeszcze rozwijał. Wciąż pozostają do zaimplementowania kolejne funkcje elementarne, jak i zagadnienia związane z obliczeniami numerycznymi. Pakiet dostępny w tej chwili stanowi jedynie bazę do dalszej pracy i w przyszłości będzie rozszerzany.

4. Literatura

Dickson L. E. 1919. On Quaternions and Their Generalization and the History of the Eight Square Theorem. Annals of Mathematics 20 (3): 155-171.

Falcão M. I., Miranda F. 2011. Quaternions: A Mathematica Package for Quaternionic Analysis. Lecture Notes in Computer Science 6784: 200-214.

Morais J. P. i in. 2014. Real Quaternionic Calculus Handbook. Birkhäuser. Basel.

Snopek K. 2013. Studies on Complex and Hypercomplex Multidimensional Analytic Signals. Zesz. Nauk. Elektronika. Z. 190. Warszawa.

Hamilton W. H. 1847. On quaternions. Proc. Royal Irish Academy 3: 1-16.

Nazwa instytucji: Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Radioelektroniki i Technik Multimedialnych

Opiekun naukowy: dr hab. inż. Kajetana Snopek

Adres do korespondencji: L.Blaszczyk@ire.pw.edu.pl