

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I TECHNIK INFORMACYJNYCH

# Rozprawa doktorska

mgr inż. Łukasz Błaszczuk

Algebry Cayleya-Dicksona w analizie sygnałów  
z elementami teorii oszczędnego próbkowania

Promotor

dr hab. inż. Kajetana M. Snopek

WARSZAWA, 2017



*„Niebezpiecznie wychodzić za własny próg, mój Frodo! – powiedział nieraz. – Trafisz na gościnię i jeśli nie powstrzymasz swoich nóg, ani się spostrzeżesz, kiedy cię poniosą. (...)”*

*“It’s a dangerous business, Frodo, going out of your door,” he used to say. “You step into the Road, and if you don’t keep your feet, there is no knowing where you might be swept off to. (...)”*

---

J. R. R. Tolkien, *Władca Pierścieni. Drużyna Pierścienia*  
(tłum. M. Skibniewska)



## Podziękowania

Rozprawa doktorska, która jest zwieńczeniem blisko czterech lat pracy, nie miałaby szans powstać, gdyby nie nieoceniona pomoc bardzo wielu osób. Ich obecność sprawiała, że wszystkie sukcesy przynosiły jeszcze więcej radości, a ich zrozumienie i wsparcie pozwoliły przetrwać momenty nieco trudniejsze.

Pragnę podziękować mojej promotor, **dr hab. inż. Kajetanie Snopek**, która opiekowała się moim rozwojem naukowym już od czasu pisania pracy inżynierskiej, i której prace w dziedzinie sygnałów hiperzespólonych były dla mnie największą inspiracją i skłoniły do wybrania tej tematyki doktoratu. Dziękuję również za wszystkie rozmowy, które od czasu do czasu przypominały mi, że studia doktoranckie to nie tylko praca naukowa.

Dziękuję także **dr. inż. Konradowi Werysowi**, który sprawił, że rozpocząłem moją przygodę z pracą naukową i miałem przyjemność spędzić kilka owocnych lat w Instytucie Kardiologii w Warszawie. To właśnie dzięki Konradowi pojechałem na pierwszą w mojej karierze konferencję do Barcelony i miałem przyjemność wysłuchać wykładu Emmanuela Candèsa, „ojca” teorii oszczędnego próbkowania. Za namowami Konrada zdecydowałem się też rozpocząć studia z matematyki i podjąłem wyzwanie, jakim były studia doktoranckie. Ogromne podziękowania należą się **dr Agnieszce Badeńskiej**, do której przyszedłem tuż po wspomnianej konferencji, i która postanowiła wspólnie ze mną zająć się tą tematyką. Agnieszka nie tylko wprowadziła mnie w świat matematyki wyższej i nauczyła matematycznej precyzji w formułowaniu myśli, ale także wspierała we wszystkich chwilach zwątpienia, zarówno tych naukowych, zawodowych jak i prywatnych. Jestem niezwykle wdzięczny Agnieszce za cierpliwość i cały poświęcony mi czas.

Studia na Wydziale Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej dały mi możliwość rozwinięcia się nie tylko naukowo w dziedzinie, o której piszę w rozprawie. Dzięki **prof. Krzysztofowi Chełmińskiemu** mogłem sprawdzić się w roli dydaktyka, a także wprowadzić w swoim życiu tradycję corocznych wędrówek po Bieszczadach. Prof. Chełmiński wspierał mnie również w moich staraniach o pracę na uczelni i dał możliwość zrealizowania wielu (czasem szalonych) pomysłów naukowo-dydaktycznych.

Wyrazy wdzięczności kieruję również do instytucji, które wieloma stypendiami wspierały mnie finansowo przez ostatnie cztery lata – **Wydziału Elektroniki i Technik Informatycznych Politechniki Warszawskiej** oraz **Fundacji Wspierania Rozwoju Radiokomunikacji i Technik Multimedialnych** przy Politechnice Warszawskiej.

Wyjątkowe wyrazy podziękowania należą się moim przyjaciołom, którzy uparcie mężczyli mnie pytaniem „A jak tam doktorat?” i nigdy nie dopuszczali myśli, że coś mogłoby się nie udać. Niezliczone wieczory przy grach planszowych były odskoczną po całym dniu pracy i pozwalały mi na chwilę zapomnieć o trudach codzienności. Szczególne podziękowania kieruję do **Wojtka**, który pomógł mi walczyć z niedoskonałościami językowymi tej pracy. Dziękuję **Justynce**, **Nikoli**, **Jankowi**, **Ani**, **Bartkowi**, **Patrykowi**, **Rafałowi**, a także tym wszystkim, których nie udało mi się tu wymienić. Za to, że znosili moje marudzenie w chwilach słabości i nie pozwolili mi się poddać, a także za to, że mogłem dzielić się z nimi radością z każdego sukcesu.

Myślę, że jest to dobre miejsce również na podziękowania mniej poważne, choć równie szczerze. Chciałbym podziękować George'owi Lucasowi i tym wszystkim, którzy stworzyli **Gwiazdne wojny**. Jest to niezwykle zjawisko i pasja, która już od wielu lat sprawia mi nieopisaną frajdę, inspiruje mnie i dodaje energii, a w gorszych momentach pozwala uciec do zupełnie innego (i jakże rozległego) świata.

Na koniec zostawiam specjalne i tak naprawdę najważniejsze podziękowania – dziękuję moim **Rodzicom** oraz całej mojej **Rodzinie** za wiarę we mnie i bezgraniczne wsparcie. Za częste i nieraz bardzo długie rozmowy, które dodawały mi nowych sił do dalszej pracy. Za bycie wzorem do naśladowania, nie tylko w „zwykłym” życiu, ale także jako naukowiec i nauczyciel. Za martwienie się (czasem bardziej niż ja), czy wszystko pójdzie dobrze, i wspólną radość, gdy już okazywało się, że tak. Rozprawę chciałbym natomiast zadedykować mojemu **Dziadkowi**, którego uśmiech i poczucie humoru na zawsze pozostanie w mojej pamięci.

Dziękuję,

## Streszczenie

Sygnały i systemy modeluje się we współczesnej nauce i technice zazwyczaj za pomocą funkcji o wartościach w ciele liczb rzeczywistych lub zespolonych. W ostatnich latach popularność zyskuje jednak podejście hiperzespolone, które wykorzystuje m.in. kwaterniony i oktoniony. Niniejsza rozprawa poświęcona jest zastosowaniu tych dwóch algebr (które są przykładami algebr Cayleya-Dicksona) w pewnych zagadnieniach teorii sygnałów.

Praca została podzielona na dwie części. Pierwsza z nich skupia się na uogólnieniu na algebrę kwaternionów teorii oszczędnego próbkowania, dynamicznie rozwijającej się dziedziny nauki stworzonej około 10 lat temu przez E. Candès'a i łączącej zarówno matematykę jak i nauki inżynierskie. Jej podstawą jest fakt, że wektory rzadkie (tzn. mające niewiele niezerowych współrzędnych) mogą być zrekonstruowane z niewielkiej liczby liniowych pomiarów za pomocą nieliniowych algorytmów rekonstrukcji (np. minimalizacji normy  $\ell_1$ ). W rozprawie dowodzimy, że jeśli kwaternionowa macierz pomiarowa ma tzw. własność ograniczonej izometrii (z odpowiednio małą stałą) to dowolny wektor może zostać zrekonstruowany w sposób stabilny (tzn. z błędem ograniczonym przez błąd pomiarowy oraz błąd najlepszego rzadkiego przybliżenia wektora) z niewielkiej liczby liniowych pomiarów za pomocą algorytmu minimalizacji normy  $\ell_1$ . Wykazujemy również, że kwaternionowe losowe macierze gaussowskie mają (z dużym prawdopodobieństwem) własność ograniczonej izometrii, zatem spełniają założenia wspomnianego twierdzenia.

W drugiej części zajmujemy się rozszerzeniem klasycznego pojęcia transformacji Fouriera na przypadek algebry oktonionów. Definiujemy pojęcie oktonionowej transformacji Fouriera i wykazujemy szereg jej własności (m.in. twierdzenie o hermitowskiej symetrii, twierdzenia Parsewala i Plancherela, a także twierdzenie o dualności splotu i mnożenia), które mają swoje odpowiedniki dla klasycznego przekształcenia. Udowodnione w tej części twierdzenia stanowią podstawę oktonionowej teorii sygnałów i punkt wyjścia do dalszych prac, w tym praktycznych zastosowań, m.in. w analizie sygnałów i systemów 3D modelowanych za pomocą równań różniczkowych cząstkowych.

**Słowa kluczowe:** algebry Cayleya-Dicksona, algebra kwaternionów, oszczędne próbkowanie, algebra oktonionów, oktonionowa transformacja Fouriera

## Abstract

Signals and systems modelling in modern science and technology is based mainly on real- and complex-valued functions. However, in recent years a hypercomplex approach has become popular, utilizing i.a. quaternions and octonions. This dissertation is devoted to the application of these two algebras (which are examples of Cayley-Dickson algebras) in some fields of the signal theory.

The dissertation is divided into two parts. The first one focuses on the generalization of the compressed sensing theory to the quaternion algebra. Compressed sensing is a still rapidly developing field of science, initiated about 10 years ago by E. Candès which involves both mathematics and engineering sciences. It is based on the fact that sparse vectors (i.e. having few non-zero coordinates) can be reconstructed from a small number of their linear measurements by nonlinear reconstruction algorithms (e.g.  $\ell_1$ -norm minimization). In the dissertation we prove that if a quaternion measurement matrix has the so-called restricted isometry property (with a suitably small constant) then any vector can be reconstructed in a stable manner (i.e. with error of reconstruction bounded by the measurement error and the error of the best sparse approximation) from a small number of its linear measurements using the  $\ell_1$ -norm minimization algorithm. We also show that the quaternion Gaussian random matrices have (with overwhelming probability) the restricted isometry property, hence fulfills the assumptions of the abovementioned theorem.

In the second part, we deal with the extension of the classical concept of Fourier transform to the octonion algebra. We define the octonion Fourier transform and prove a number of its properties (including the Hermitian symmetry theorem, the Parseval and Plancherel theorems and the theorem on convolution-multiplication duality) which have their analogues for classical transformation. Theorems proved in this part form the basis of the octonion signal theory and are the starting point for further work, including finding practical applications, e.g. in the analysis of signal and 3D systems modeled by partial differential equations.

**Keywords:** Cayley-Dickson algebras, quaternion algebra, compressed sensing, octonion algebra, octonion Fourier transform



## Spis treści

Wstęp .....	11
1. Układ i teza pracy .....	12
2. Wprowadzenie do algebr Cayleya-Dicksona .....	13
2.1. Algebra kwaternionów .....	13
2.2. Algebra oktonionów .....	25
Rozdział 1. Kwaterniony w teorii oszczędnego próbkowania .....	33
3. Podstawy teorii oszczędnego próbkowania – wstęp historyczny .....	34
4. Teoria oszczędnego próbkowania w algebrze kwaternionów .....	39
4.1. Własność ograniczonej izometrii .....	40
4.2. Stabilna rekonstrukcja z danych zaszumionych i dokładnych .....	43
4.3. Kwaternionowe gaussowskie macierze losowe .....	48
5. Symulacje numeryczne .....	56
5.1. Rozkłady empiryczne stałych ograniczonej izometrii .....	56
5.2. Stabilna rekonstrukcja wektorów kwaternionowych .....	58
5.3. Dane rzeczywiste .....	62
Rozdział 2. Oktoniony w analizie sygnałów i systemów .....	67
6. Hiperzespolone przekształcenie Fouriera w teorii sygnałów – przegląd literatury .....	69
7. Oktonionowa transformacja Fouriera .....	75
7.1. Definicja i podstawowe własności .....	75
7.2. Hermitowska symetria OFT .....	85
7.3. Twierdzenia o przekształceniu afinicznym, modulacji i przesunięciu .....	87
7.4. Twierdzenia Parsewala-Plancherela .....	92
7.5. Funkcja autokorelacji .....	96
8. OFT w analizie systemów 3D .....	101
8.1. Twierdzenie o transformacji pochodnych cząstkowych .....	101
8.2. Twierdzenie o dualności splotu i mnożenia .....	105
8.3. Algebra liczb poczwórnych zespolonych .....	107
8.4. Oktonionowa charakterystyka częstotliwościowa .....	109
8.5. Analiza pewnych równań różniczkowych i różnicowych .....	111
Podsumowanie i wnioski końcowe .....	117

Dodatek .....	119
A. Narzędzia z teorii prawdopodobieństwa .....	119
B. Pakiet <code>Octonions</code> środowiska <i>Mathematica</i> .....	122
Bibliografia.....	127
Skorowidz .....	133
Spis symboli .....	135

## Wstęp

We współczesnej nauce i technice modelowanie sygnałów i systemów przetwarzających te sygnały opiera się przede wszystkim na funkcjach (zmiennej ciągłej lub dyskretnej) o wartościach w ciele liczb rzeczywistych lub zespolonych. Jest to jednak podejście, które narażone jest na różnego rodzaju ograniczenia wynikające z natury tych liczb. W ostatnich latach popularność zyskuje alternatywne podejście, w którym do opisu pewnych sygnałów występujących w codziennym życiu (np. obrazów kolorowych) wykorzystuje się algebry hiperzespolone, m.in. algebry Cayleya-Dicksona. Stanowią one naturalne uogólnienie ciała liczb zespolonych i umożliwiają spojrzenie na teorię sygnałów pod nieco innym kątem. W stosunku do klasycznej teorii sygnałów, jest to podejście stosunkowo nowe i w bardzo wielu aspektach wciąż niezbadane.

Niniejsza rozprawa poświęcona jest wykorzystaniu algebr Cayleya-Dicksona w analizie sygnałów. Szczególny nacisk położony został na dwie algebry – kwaternionów i oktonionów. Aby zaprezentować możliwości, jakie niesie ze sobą zastosowanie struktur hiperzespolonych, w pracy wyróżnione są dwa tematy, na których skupiają się poszczególne rozdziały.

Pierwszy z nich poświęcony jest kwaternionom i zastosowaniu ich w nowej dziedzinie teorii sygnałów, tzn. w teorii oszczędnego próbkowania (ang. *compressed sensing*). Zmierzenie się z tą tematyką wydaje się uzasadnione ze względu na potencjalne aplikacje, m.in. w przetwarzaniu obrazów kolorowych, ale jest także odpowiedzią na bieżące trendy w literaturze tematu. Zaczęły pojawiać się prace, w których autorzy wykonują eksperymenty numeryczne dotyczące wykorzystania znanych metod oszczędnego próbkowania w algebrze kwaternionów, jednak bez żadnego matematycznego uzasadnienia. Dopiero rozważania, które zostały opisane w rozprawie pokazały, że sukcesy tych eksperymentów są teoretycznie uzasadnione, a nie są tylko dziełem przypadku.

Drugim zagadnieniem poruszonym w rozprawie jest wykorzystanie algebry oktonionów do uogólnienia pewnych klasycznych pojęć znanych w teorii sygnałów, m.in. do zdefiniowania oktonionowego przekształcenia Fouriera. W literaturze można spotkać głównie rozważania na temat wykorzystania hiperzespolonych algebr Clifforda, np. do zdefiniowania transformacji Fouriera w sensie Clifforda. Prace dotyczące transformacji Fouriera w sensie Cayleya-Dicksona prowadzone były głównie przez zespół prof. Hahna na Wydziale Elektroniki i Technik Informatycznych Politechniki Warszawskiej, jednak większość własności nie została formalnie wyprowadzona. Wyniki zaprezentowane w rozprawie w znaczący sposób rozszerzają tę teorię.

## 1. Układ i teza pracy

Praca ta została zrealizowana w Pracowni Sygnałów i Sieci Radiokomunikacyjnych Zakładu Radiokomunikacji w Instytucie Radioelektroniki i Technik Multimedialnych pod kierunkiem dr hab. inż. Kajetany M. Snopek w latach 2013–2017. Zawiera ona również opis wyników badań prowadzonych we współpracy z dr Agnieszką Badeńską z Wydziału Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej.

Rozprawa składa się z pięciu części: **Wstępu**, dwóch właściwych rozdziałów pracy, **Podsumowania i wniosków końcowych** oraz **Dodatków**. Wstęp i poszczególne rozdziały zostały podzielone na łącznie osiem sekcji.

W dalszej części Wstępu, tzn. w Sekcji 2, wprowadzimy teoretyczne podstawy omawianej problematyki. W zwięzły sposób przedstawimy algebry Cayleya-Dicksona, które będą wykorzystane w dalszej części pracy, tzn. kwaterniony i oktoniony.

Rozdział 1 zawiera opis badań nad wykorzystaniem kwaternionów w teorii oszczędnego próbkowania i składa się z trzech sekcji. W Sekcji 3 zamieszczamy skrócony przegląd literatury, na której bazują autorskie wyniki w tej dziedzinie. W Sekcji 4 przedstawiamy szczegółowe rozważania teoretyczne na temat uogólnienia teorii oszczędnego próbkowania na algebrę kwaternionów, które zobrazujemy numerycznymi eksperymentami w Sekcji 5.

W Rozdziale 2 skupiamy się na oktonionowym podejściu do teorii sygnałów i systemów. Został on podzielony na trzy sekcje. Sekcję 6 poświęcamy literaturze wprowadzającej do poruszanej tematyki. Sekcja 7 zawiera wyniki dotyczące oktonionowej transformacji Fouriera, a w Sekcji 8 przedstawiamy możliwe zastosowania tego przekształcenia w analizie systemów 3D.

Ostatni rozdział pracy zawiera podsumowanie otrzymanych wyników oraz pewne komentarze dotyczące dalszych możliwych kierunków prac w poruszanej dziedzinie. W końcowej części pracy zamieszczamy aneksy opisujące wykorzystywane narzędzia, które nie dotyczą bezpośrednio poruszanej tematyki, ale stanowiły pomoc w wykonywanych badaniach. W szczególności Dodatek B opisuje autorski pakiet do środowiska obliczeniowego *Mathematica*, który umożliwił wykonywanie skomplikowanych obliczeń symbolicznych w algebrze oktonionów.

Ze względu na obszerność rozważanej tematyki i wyodrębnienie dwóch (pozornie niezależnych) części, tezy zostały sformułowane następująco:

1. Klasyczną teorię oszczędnego próbkowania można rozszerzyć na przypadek sygnałów kwaternionowych i kwaternionowych macierzy pomiarowych.
2. Oktonionowa transformacja Fouriera ma własności, które pozwalają na zastosowanie jej w analizie sygnałów i systemów 3D.

## 2. Wprowadzenie do algebr Cayleya-Dicksona

**2.1. Algebra kwaternionów.** Algebra kwaternionów jest uogólnieniem liczb zespolonych, a jej autorstwo przypisuje się Sir Williamowi R. Hamiltonowi, który uderzony swoim odkryciem wyrył w 1843 roku w kamieniu na moście Broome w Dublinie słynny napis

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

definiujący reguły mnożenia kwaternionów [98]. Teoria kwaternionów została bogato przedstawiona m.in. w [46, 76, 79].

Niech  $\mathcal{H} = \{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  będzie bazą w 4-wymiarowej przestrzeni wektorowej (ozn.  $\mathbb{H}$ ) nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Mnożenie w  $\mathbb{H}$  definiujemy według równości

$$(2.1) \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1,$$

$$(2.2) \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

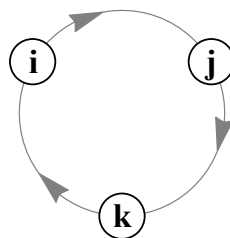
Można łatwo zauważyć, że równości (2.2) wynikają wprost z (2.1). Reguły mnożenia wygodnie jest zapisać również w postaci tabeli (por. Tab. 2.1) lub grafu (por. Rys. 2.1). Wprost z definicji wynika także, że mnożenie elementów z algebry  $\mathbb{H}$  jest rozdzielne względem dodawania, a mnożenie przez skalary (tzn. przez liczby rzeczywiste) jest przemienne, tzn.

$$(2.3) \quad \forall_{x,y,z \in \mathbb{H}} \quad x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx,$$

$$(2.4) \quad \forall_{x,y \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}} \quad x(\lambda y) = (\lambda x)y = \lambda(xy).$$

$\cdot$	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
1	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-1	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	-1	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	-1

TABELA 2.1. Reguły mnożenia w  $\mathbb{H}$ .



RYSUNEK 2.1. Schemat mnożenia jednostek urojonych w  $\mathbb{H}$ .

DEFINICJA 2.1. Elementy zbioru  $\mathbb{H}$  wraz z operacjami algebraicznymi  $\mathbb{H}$  jako przestrzeni wektorowej nad ciałem  $\mathbb{R}$  oraz mnożeniem zadany równościami (2.1) nazywamy (*rzeczywistymi*) *kwaternionami*. Elementy  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  nazywamy *jednostkami urojonymi*.

Symbolu  $\mathbb{H}$  używamy ze względów historycznych, dla upamiętnienia W. R. Hamiltona. Kwaterniony  $q \in \mathbb{H}$  będziemy zapisywać w postaci

$$(2.5) \quad q = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}, \quad r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}.$$

Mając na uwadze rozważania na temat algebr wyższych rzędów, np. oktonionów, często wygodnie jest zastosować inne oznaczenia jednostek urojonych, tzn. zastąpić  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  oraz  $\mathbf{k}$  symbolami  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  oraz  $\mathbf{e}_3$ .

Kwaterniony są przykładem tzw. hiperzespolonych *algebr Clifforda* [63]. W ogólności algebry Clifforda  $\mathcal{C}_{p,q}(\mathbb{R})$  konstruuje się jako  $2^{p+q}$ -wymiarowe przestrzenie wektorowe nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Rozważmy układ wektorów

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}\},$$

dla którego reguły mnożenia są zdefiniowane równościami

$$\begin{aligned} \forall_{i=1, \dots, n} \quad \mathbf{e}_i^2 &= \varepsilon_i, \\ \forall_{i,j=1, \dots, n} \quad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i &= 2\varepsilon_i\delta_{ij}, \end{aligned}$$

gdzie  $\varepsilon_i = 1$  dla  $i = 1, \dots, p$ ,  $\varepsilon_i = -1$  dla  $i = p+1, \dots, p+q$  oraz  $\delta_{ij}$  jest klasyczną deltą Kroneckera. Dodając aksjomat łączności mnożenia, układ wektorów

$$\{\mathbf{e}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \subseteq \{1, \dots, n\}\},$$

gdzie  $\mathbf{e}_{\mathcal{A}} = \mathbf{e}_{h_1} \dots \mathbf{e}_{h_k}$  dla  $\mathcal{A} = \{h_1, \dots, h_k\}$  oraz  $\mathbf{e}_{\emptyset} = 1$ , tworzy bazę przestrzeni wektorowej  $\mathcal{C}_{p,q}(\mathbb{R})$ . Można łatwo zauważyć, że  $\mathcal{C}_{0,1}(\mathbb{R})$  jest izomorficzna z ciałem liczb zespolonych  $\mathbb{C}$ , a algebra  $\mathcal{C}_{0,2}(\mathbb{R})$  to algebra kwaternionów  $\mathbb{H}$ .

Jak wspomnieliśmy, kwaterniony są uogólnieniem liczb zespolonych, zatem w sposób naturalny rozszerzają się na nie klasyczne pojęcia związane z liczbami zespolonymi.

DEFINICJA 2.2. Niech  $q \in \mathbb{H}$  będzie postaci (2.5). Liczbę  $r_0 \in \mathbb{R}$  nazywamy *częścią rzeczywistą (skalarną)* kwaternionu, natomiast  $r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$  nazywamy *częścią urojoną (wektorową)* kwaternionu. Wprowadzamy oznaczenie

$$\operatorname{Re}(q) := r_0, \quad \operatorname{Im}(q) := r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}.$$

Kwaterniony  $q \in \mathbb{H}$  takie, że  $\operatorname{Re}(q) = 0$  nazywamy *czystymi kwaternionami*.

Gdy nie będzie budziło to wątpliwości, będziemy stosować zapis wektorowy  $\mathbf{q} := \operatorname{Im}(q)$ . Wówczas  $q = r_0 + \mathbf{q}$ . Zwróćmy uwagę na różnicę w stosunku do liczb zespolonych. Część urojona liczby zespolonej to liczba rzeczywista, która stoi przy jednostce urojonej. Z kolei część urojona kwaternionu, tzn.  $\mathbf{q}$  możemy utożsamiać z wektorem w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

DEFINICJA 2.3. Niech  $q = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ . *Sprzężeniem kwaternionowym* nazywamy funkcję

$$\bar{\cdot} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}; \quad \bar{q} := \operatorname{Re}(q) - \operatorname{Im}(q) = r_0 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}.$$

Z bezpośredniego rachunku wynikają własności zebrane w poniższym fakcie [76].

FAKT 2.4. *Niech  $q \in \mathbb{H}$ . Zachodzą poniższe wzory:*

$$(2.6) \quad \operatorname{Re}(q) = \frac{q + \bar{q}}{2}, \quad \operatorname{Im}(q) = \frac{q - \bar{q}}{2},$$

$$(2.7) \quad \bar{q} = -\frac{1}{2}(q + \mathbf{i} \cdot q \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} \cdot q \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot q \cdot \mathbf{k}).$$

Wprowadźmy grupę trzech działań na kwaternionach. Niech  $q = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$  i zdefiniujmy

$$(2.8) \quad \alpha_1(q) = -\mathbf{i} \cdot q \cdot \mathbf{i}, \quad \alpha_2(q) = -\mathbf{j} \cdot q \cdot \mathbf{j}, \quad \alpha_3(q) = -\mathbf{k} \cdot q \cdot \mathbf{k}.$$

Przeprowadzając bezpośredni rachunek otrzymujemy

$$\alpha_1(q) = r_0 + r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k},$$

$$\alpha_2(q) = r_0 - r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k},$$

$$\alpha_3(q) = r_0 - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}.$$

Każda z tych funkcji jest anty-inwolucją, tzn. jest funkcją  $\mathbb{R}$ -liniową,  $\alpha_\ell(\alpha_\ell(q)) = q$  oraz zachodzi własność  $\alpha_\ell(q_1 \cdot q_2) = \alpha_\ell(q_1) \cdot \alpha_\ell(q_2)$  dla  $\ell = 1, 2, 3$  [79].

UWAGA 2.5. Z Faktu 2.4 wynika natychmiast, że sprzężenie kwaternionowe może być wyrażone za pomocą anty-inwolucji danych wzorami (2.8). Jest to involucja, tzn. jest funkcją  $\mathbb{R}$ -liniową,  $\bar{\bar{q}} = q$  i  $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ .

Ponieważ utożsamiamy algebrę  $\mathbb{H}$  z przestrzenią  $\mathbb{R}^4$ , to w naturalny sposób wprowadza się definicję normy kwaternionu tak, jak dla dowolnych rzeczywistych przestrzeni  $n$ -wymiarowych. W ten sam sposób wprowadza się normę liczb zespolonych (utożsamianych z przestrzenią  $\mathbb{R}^2$ ). Z tego utożsamienia wynika natychmiast prawdziwość Faktu 2.7, a przeprowadzając bezpośredni rachunek otrzymujemy dowód Faktu 2.8 i Twierdzenia 2.9.

DEFINICJA 2.6. Niech  $q = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ . *Normą kwaternionową* nazywamy

$$|\cdot| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}; \quad |q| := \sqrt{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}.$$

Kwaterniony  $q \in \mathbb{H}$  takie, że  $|q| = 1$  nazywamy *kwaternionami jednostkowymi*.

FAKT 2.7. *Niech  $q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wówczas*

$$(a) \quad |q| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 0,$$

$$(b) \quad |\lambda \cdot q| = |\lambda| \cdot |q|,$$

$$(c) \quad |q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|.$$

FAKT 2.8. Niech  $q \in \mathbb{H}$ . Wówczas

- (a)  $|q|^2 = q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q$ ,
- (b)  $|q| = |\bar{q}| = |-q|$ .

TWIERDZENIE 2.9. Niech  $q \in \mathbb{H}$  będzie taki, że  $\operatorname{Re}(q) = 0$  (tzn.  $q = \mathbf{q}$ ). Wówczas

$$q^2 = -|q|^2.$$

Działania na liczbach zespolonych mają wiele własności znanych z liczb rzeczywistych. Kwaterniony natomiast tworzą *nieprzemienną* algebrę 4-ego rzędu nad ciałem  $\mathbb{R}$ . W ogólności  $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$ . Jest to jednak algebra *łączna*, tzn. dla wszystkich  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$  zachodzi  $q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3) = (q_1 \cdot q_2) \cdot q_3$ . Prawdziwy jest również poniższy fakt.

FAKT 2.10. Niech  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ . Wówczas

- (a)  $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ ,
- (b)  $|q_1 \cdot q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$ .

Tak jak w przypadku ciał liczb rzeczywistych i zespolonych, w algebrze kwaternionów zdefiniowane jest także pojęcie elementu odwrotnego, o czym mówi poniższy fakt.

FAKT 2.11. Dla dowolnego niezerowego kwaternionu  $q \in \mathbb{H}$  istnieje dokładnie jeden element odwrotny  $q^{-1} \in \mathbb{H}$ , tzn. taki że  $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$ . Ponadto  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$  i dla  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ,  $q_1, q_2 \neq 0$ , zachodzi wzór

$$(2.9) \quad (q_1 \cdot q_2)^{-1} = q_2^{-1} \cdot q_1^{-1}.$$

Możemy zatem jednoznacznie wprowadzić dzielenie kwaternionów. Nieprzemienność mnożenia sprawia jednak, że określa się zarówno dzielenie *prawe* jak i *lewe*, tzn. dla  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ,  $q_2 \neq 0$ , definiujemy

$$q_1/q_2 := q_1 q_2^{-1} = \frac{q_1 \cdot \bar{q}_2}{|q_2|^2}, \quad q_2 \backslash q_1 := q_2^{-1} q_1 = \frac{\bar{q}_2 \cdot q_1}{|q_2|^2}.$$

Kwaterniony są więc *algebrą z dzieleniem* (ang. *division algebra*). Podsumowując, algebra kwaternionów spełnia wszystkie aksjomaty ciała, poza przemiennością mnożenia. W związku z tym przyjęło się nazywać ją czasem *ciałem nieprzemiennym*.

Istotne z punktu widzenia analizy sygnałów są funkcje elementarne zmiennych kwaternionowych, których wartości są kwaternionami, m.in. funkcja wykładnicza. W analizie rzeczywistej i zespolonej funkcję wykładniczą definiuje się na różne sposoby [73, 91]. W przypadku kwaternionów zastosujemy jeden ze znanych sposobów [76].

DEFINICJA 2.12. Niech  $q \in \mathbb{H}$ . Funkcją wykładniczą kwaternionu nazywamy

$$(2.10) \quad \exp(q) = e^q := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!},$$

gdzie  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  jest liczbą Eulera.



TWIERDZENIE 2.13. Dla dowolnego  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} = r_0 + \mathbf{q}$ , zachodzi

$$(2.11) \quad e^q = e^{r_0} \left( \cos |\mathbf{q}| + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \sin |\mathbf{q}| \right).$$

UWAGA 2.14. W ogólności nie jest prawdziwy wzór  $e^p e^q = e^{p+q}$ ,  $p, q \in \mathbb{H}$ . Można jednak pokazać, że wzór ten jest prawdziwy, jeśli  $pq = qp$ . Tak jak dla funkcji wykładniczej zmiennej zespolonej, zachodzi  $e^q \neq 0$  dla  $q \in \mathbb{H}$ .

Każdą liczbę zespoloną można przedstawić w postaci trygonometrycznej oraz wykładniczej

$$z = |z| (\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) = |z| e^{i\theta}, \quad z \in \mathbb{C},$$

gdzie  $\theta$  jest pewną liczbą z przedziału  $[0, 2\pi)$ . Ze względu na przemienność mnożenia liczb zespolonych, postać ta znacznie ułatwia obliczenia, zwłaszcza potęgowanie. Dla kwaternionów możemy uzyskać analogiczną postać. Dowolny niezerowy kwaternion  $q = r_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$  można zapisać w postaci trygonometrycznej [76]

$$(2.12) \quad q = |q| \cdot \left( \cos \theta + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \sin \theta \right),$$

gdzie  $\theta \in [0, \pi]$  jest rozwiązaniem układu równań

$$(2.13) \quad \cos \theta = \frac{r_0}{|q|}, \quad \sin \theta = \frac{|\mathbf{q}|}{|q|}.$$

Zauważmy, że zapisując  $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ , na mocy Twierdzenia 2.13 otrzymujemy ponadto

$$\begin{aligned} e^{\theta\boldsymbol{\mu}} &= \cos |\theta\boldsymbol{\mu}| + \frac{\theta\boldsymbol{\mu}}{|\theta\boldsymbol{\mu}|} \cdot \sin |\theta\boldsymbol{\mu}| \\ &= \cos \theta + \frac{\theta\boldsymbol{\mu}}{|\theta\boldsymbol{\mu}|} \cdot \sin \theta \\ &= \cos \theta + \boldsymbol{\mu} \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd postać wykładniczą kwaternionu  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q \neq 0$ :

$$(2.14) \quad q = |q| \cdot e^{\theta\boldsymbol{\mu}},$$

gdzie  $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$  oraz  $\theta \in [0, \pi]$  jest rozwiązaniem układu równań (2.13).

Z powyższych wzorów można natychmiast wyprowadzić równoważne definicje funkcji trygonometrycznych argumentu rzeczywistego, w szczególności

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{\mu\alpha} + e^{-\mu\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2\mu} (e^{\mu\alpha} - e^{-\mu\alpha}),$$

gdzie  $\boldsymbol{\mu}$  jest dowolnym jednostkowym kwaternionem o zerowej części rzeczywistej. Są to wzory znane również z analizy zespolonej (w szczególnym przypadku  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{i}$ ) [73, 91].

Postać (2.14) nie jest jedyną formą postaci wykładniczej. Można także uzyskać postać, w której każda z jednostek urojonych  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  jest reprezentowana przez oddzielną funkcję wykładniczą, a więc mieć postać odpowiadającą postaci wykładniczej liczby zespolonej (gdzie zawsze w wykładniku mamy jednostkę urojoną  $\mathbf{i}$ ).

Niech  $q = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ . Będziemy oznaczać

$$\arg_{\mathbf{i}}(q) = \arctg_2(r_1, r_0), \quad \arg_{\mathbf{j}}(q) = \arctg_2(r_2, r_0), \quad \arg_{\mathbf{k}}(q) = \arctg_2(r_3, r_0),$$

gdzie  $\arctg_2(\cdot, \cdot)$  jest funkcją odwrotną do funkcji tangens, ale uwzględniającą znak poszczególnych argumentów. Zatem  $\arg_{\ell}(\cdot)$ ,  $\ell = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , jest funkcją zwracającą kąt, jaki z osią rzeczywistą tworzy rzut wektora  $q$  na płaszczyznę rozpinaną przez oś rzeczywistą i odpowiednią oś urojoną. Bülow wykazał, że dowolny kwaternion można zapisać w postaci danej poniższym twierdzeniem, które cytujemy za [19].

**Twierdzenie 2.15.** *Dowolny kwaternion  $q \in \mathbb{H}$  można zapisać w postaci*

$$(2.15) \quad q = |q| e^{\phi\mathbf{i}} e^{\psi\mathbf{k}} e^{\theta\mathbf{j}}, \quad \phi \in [-\pi, \pi), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \psi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

**Uwaga 2.16.** Przeprowadzając dowód, Bülow podał również schemat znajdowania wartości poszczególnych kątów  $\phi, \theta, \psi$ . Przebiega on według kolejnych punktów. Niech  $q = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$  będzie kwaternionem jednostkowym. Wówczas

- (a)  $\psi = -\frac{1}{2} \arcsin(2(r_1r_2 - r_0r_3))$ ,
- (b) jeśli  $\psi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ , to

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \arg_{\mathbf{i}}(q\alpha_2(\bar{q})), \\ \theta &= \frac{1}{2} \arg_{\mathbf{j}}(\alpha_1(\bar{q})q), \end{aligned}$$

jeśli natomiast  $\psi = \pm\frac{\pi}{4}$ , to należy wybrać jedną z możliwości:

$$\begin{aligned} \phi &= 0, \\ \theta &= \frac{1}{2} \arg_{\mathbf{j}}(\alpha_3(\bar{q})q), \end{aligned} \quad \text{lub} \quad \begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \arg_{\mathbf{i}}(q\alpha_3(\bar{q})), \\ \theta &= 0, \end{aligned}$$

- (c) jeśli  $e^{\phi\mathbf{i}} e^{\psi\mathbf{k}} e^{\theta\mathbf{j}} = -q$  oraz  $\phi \geq 0$ , to zamieniamy  $\phi \mapsto \phi - \pi$ ,
- jeśli  $e^{\phi\mathbf{i}} e^{\psi\mathbf{k}} e^{\theta\mathbf{j}} = -q$  oraz  $\phi < 0$ , to zamieniamy  $\phi \mapsto \phi + \pi$ .

Kąty  $\phi, \theta, \psi$  wprowadzone w Twierdzeniu 2.15 są *kątami Eulera* [11, 19].

Ponieważ jedna z części tej pracy dotyczy przekształceń Fouriera, warto jeszcze wspomnieć o różniczkowaniu i całkowaniu funkcji o wartościach kwaternionowych. Ograniczymy się jednak do funkcji zmiennej rzeczywistej. Tak jak w przypadku funkcji o wartościach zespolonych, zarówno pochodne (zwykcyjne i cząstkowe) jak i całkę (jedno- i wielowymiarową) obliczamy osobno dla części rzeczywistej i czynników stojących przy wszystkich jednostkach urojonych. Własności różniczkowania i całkowania pozostają więc takie same, jak w klasycznej teorii funkcji o wartościach rzeczywistych.

Ze względu na zastosowania praktyczne, m.in. w teorii oszczędnego próbkowania, której poświęcony jest Rozdział 1, należy zająć się także kwaternionowymi odpowiednikami przestrzeni wektorowych. Tak jak w przypadku rzeczywistym i zespolonym, rozważamy  $n$ -wymiarowe moduły prawostronne  $\mathbb{H}^n$  nad pierścieniem  $\mathbb{H}$  [12, 79], tzn. algebry, w których  $(\mathbb{H}^n, +)$  jest grupą abelową, a mnożenie  $\cdot : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^n$  ma następujące własności:

$$\begin{aligned} \forall_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n, q \in \mathbb{H}} \quad & (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot q = \mathbf{x} \cdot q + \mathbf{y} \cdot q, \\ \forall_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n, q, r \in \mathbb{H}} \quad & \mathbf{x} \cdot (q + r) = \mathbf{x} \cdot q + \mathbf{x} \cdot r, \\ \forall_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n, q, r \in \mathbb{H}} \quad & \mathbf{x} \cdot (q \cdot r) = (\mathbf{x} \cdot q) \cdot r, \\ \forall_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n} \quad & \mathbf{x} \cdot 1 = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Własności te wynikają z własności mnożenia kwaternionów. Jednak  $\mathbb{H}$  nie jest ciałem, więc moduł prawostronny  $\mathbb{H}^n$  nad  $\mathbb{H}$  nie jest przestrzenią wektorową. Jednak ze względu na to, że pierścień  $\mathbb{H}$  czasem nazywa się ciałem nieprzemienne, przyjęło się również nazywać moduł prawostronny  $\mathbb{H}^n$  nad pierścieniem  $\mathbb{H}$  *prawostronną przestrzenią wektorową*.

Niech  $\mathbf{x}$  będzie wektorem w  $n$ -wymiarowej przestrzeni  $\mathbb{H}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wektory interpretujemy jako jednokolumnowe macierze  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n \times 1}$ , tzn.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{H},$$

gdzie  $T$  oznacza transpozycję macierzy.

Podobnie jak w przestrzeniach rzeczywistych i zespolonych, każda kwaternionowa macierz reprezentuje *przekształcenie liniowe*  $\mathbf{A} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$  (na przestrzeni prawostronnej nad  $\mathbb{H}$ ), które ma następujące własności:

$$\forall_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n, q \in \mathbb{H}} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}q) = (\mathbf{A}\mathbf{x})q.$$

Wprowadzamy również pojęcie *hermitowskiego sprzężenia* macierzy kwaternionowej  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  jako  $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$ . Oczywiście  $\mathbf{A}^{**} = \mathbf{A}$ . Ponadto z bezpośredniego rachunku otrzymujemy własności sprzężenia hermitowskiego, ujęte w postaci poniższego faktu.

**FAKT 2.17.** *Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n \times \ell}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  i  $q \in \mathbb{H}$ . Wówczas*

$$(\mathbf{A}q)^* = \bar{q}\mathbf{A}^*, \quad (q\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^*\bar{q}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})^* = \mathbf{x}^*\mathbf{A}^*, \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.$$

Definiuje się także funkcję mającą własności iloczynu skalarnego przestrzeni  $\mathbb{H}^n$ , tak jak w  $\mathbb{R}^n$  czy  $\mathbb{C}^n$ . Wprowadźmy dla  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{H}^n$  funkcję

$$(2.16) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}; \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^*\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \bar{y}_k x_k.$$

Stąd również wynika wzór na *normę*  $\ell_2$  wektora kwaternionowego  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{H}^n$

$$(2.17) \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \bar{x}_k x_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

Przeprowadzając bezpośredni rachunek można wykazać poniższe twierdzenie i natychmiastowy wniosek. Fakty te, podobnie jak inne elementarne własności przestrzeni  $\mathbb{H}^n$ , przytaczamy za [4, 15, 79].

**Twierdzenie 2.18.** *Funkcja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  spełnia aksjomaty iloczynu skalarnego.*

**Wniosek 2.19.** *Funkcja  $\|\cdot\|_2$  spełnia aksjomaty normy.*

Zauważmy, że dla  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$  i  $q \in \mathbb{H}$  zachodzi również własność  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}q \rangle = \bar{q} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ . Należy jednak pamiętać, że funkcja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nie jest iloczynem skalarnym w klasycznym sensie ponieważ  $\mathbb{H}$  nie jest ciałem. Spełnia jednak wszystkie spodziewane własności, ponadto prawdziwe są odpowiedniki nierówności Cauchy'ego-Schwarza i równości polaryzacyjnej, znane z analizy rzeczywistych i zespolonych przestrzeni wektorowych. Są to istotne składniki dowodów twierdzeń przedstawionych w Sekcji 4. Dowód Twierdzenia 2.20 jest powtórzeniem kroków klasycznego twierdzenia dla przestrzeni rzeczywistych i zespolonych.

**Twierdzenie 2.20** (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza). *Dla dowolnych  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$*

$$(2.18) \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{y}\|_2.$$

Reprezentację kwaternionowego iloczynu skalarnego za pomocą równości polaryzacyjnej można znaleźć w literaturze [79], ale została ona również niezależnie wyprowadzona w [15]. Zanim sformułujemy twierdzenie zauważmy, że każdy niezerowy kwaternion  $q \in \mathbb{H}$  można zapisać w postaci

$$(2.19) \quad q = x + \boldsymbol{\mu}y,$$

gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $y \geq 0$ , a  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{H}$  jest czystym jednostkowym kwaternionem, tzn. takim, że  $\operatorname{Re} \boldsymbol{\mu} = 0$  i  $|\boldsymbol{\mu}| = 1$ . Poniższy lemat jest kluczowy w dowodzie równości polaryzacyjnej. Dowód prezentujemy za [3, 15].

**Lemat 2.21.** *Niech  $q = x + \boldsymbol{\mu}y \in \mathbb{H}$ , gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $y \geq 0$ , a  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{H}$  jest czystym jednostkowym kwaternionem. Wówczas*

$$(2.20) \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} q \boldsymbol{\mu} = q, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} \bar{q} \boldsymbol{\mu} = \bar{q}.$$

**Dowód.** Z przemienności mnożenia kwaternionów przez liczby rzeczywiste mamy

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} q \boldsymbol{\mu} = \bar{\boldsymbol{\mu}} (x + \boldsymbol{\mu}y) \boldsymbol{\mu} = \bar{\boldsymbol{\mu}} x \boldsymbol{\mu} + \bar{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu} y \boldsymbol{\mu} = x |\boldsymbol{\mu}|^2 + |\boldsymbol{\mu}|^2 y \boldsymbol{\mu} = x + \boldsymbol{\mu}y = q.$$

Drugą równość udowadniamy analogicznie. □

**Twierdzenie 2.22** (Równość polaryzacyjna). *Niech  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$  i oznaczmy*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_0 + \boldsymbol{\mu}y_0,$$

gdzie  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  oraz  $\boldsymbol{\mu}$  jest czystym jednostkowym kwaternionem. Wówczas

$$(2.21) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4} \left( \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \right) + \frac{\boldsymbol{\mu}}{4} \left( \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\boldsymbol{\mu}\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \right).$$

DOWÓD. Niech  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{H}^n$ . Rozważmy część rzeczywistą prawej strony wzoru (2.21). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= \sum_{k=1}^n \left( (\overline{x_k} + \overline{y_k})(x_k + y_k) - (\overline{x_k} - \overline{y_k})(x_k - y_k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \overline{x_k}x_k + \overline{y_k}x_k + \overline{x_k}y_k + \overline{y_k}y_k - \overline{x_k}x_k + \overline{y_k}x_k + \overline{x_k}y_k - \overline{y_k}y_k \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left( \overline{y_k}x_k + \overline{x_k}y_k \right) = 2 \left( \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \right) \\ &= 2 \left( \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \right) = 4 \operatorname{Re} (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle). \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć postać części urojonej zauważmy, że

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\mu\|_2^2 &= \|\mathbf{x}\|_2^2 + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \mu - \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|_2^2, \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\mu\|_2^2 &= \|\mathbf{x}\|_2^2 - \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \mu + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|_2^2, \end{aligned}$$

co wynika z faktu, że dla  $\mu \in \mathbb{H}$  takich, że  $\operatorname{Re} \mu = 0$  zachodzi  $\overline{\mu} = -\mu$ . Z Lematu 2.21 otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} \mu \left( \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\mu\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\mu\|_2^2 \right) &= 2\mu \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \mu - 2\mu^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -2\overline{\mu} \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \mu + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &= -2\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2 \left( \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \right) \\ &= 4 \operatorname{Im} (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle). \end{aligned}$$

Kończy to dowód. □

Rozważając przekształcenia liniowe w przestrzeniach rzeczywistych lub zespolonych nie sposób ominąć zagadnienia wartości i wektorów własnych [102]. Brak przemienności mnożenia kwaternionów sprawia, że w przypadku macierzy kwaternionowych należy rozważać dwa różne problemy własne.

DEFINICJA 2.23. Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ . Niezerowy wektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  nazywamy *prawym wektorem własnym* macierzy  $\mathbf{A}$ , jeśli istnieje  $\lambda \in \mathbb{H}$  taka, że

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}\lambda.$$

Liczbę  $\lambda$  nazywamy wówczas *prawą wartością własną* macierzy  $\mathbf{A}$ . Analogicznie niezerowy wektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$  jest *lewym wektorem własnym* macierzy  $\mathbf{A}$ , jeśli istnieje  $\lambda \in \mathbb{H}$  taka, że

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

i liczbę  $\lambda$  nazywamy *lewą wartością własną* macierzy  $\mathbf{A}$ .

Z wartościami własnymi macierzy kwaternionowych związane jest również pojęcie równoważności kwaternionów. Mówimy, że dwa kwaterniony  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{H}$  są *równoważne*, jeśli istnieje niezerowy kwaternion  $q \in \mathbb{H}$  taki, że  $\lambda_1 = q^{-1}\lambda_2q$ .

Okazuje się, że lewy i prawy problem własny muszą być traktowane oddzielnie i w zupełnie inny sposób. W przeciwieństwie do lewych wartości własnych, prawe wartości własne macierzy kwaternionowych są dobrze poznane. Mówią o tym dwa poniższe twierdzenia, przytoczone za [79, 102].

**Twierdzenie 2.24.** *Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ . Wówczas*

- (a)  $\mathbf{A}$  ma co najmniej jedną lewą wartość własną;
- (b)  $\mathbf{A}$  ma dokładnie  $n$  (razem z krotnościami i z dokładnością do równoważności kwaternionów) prawych wartości własnych i wszystkie są liczbami zespolonymi o nieujemnych częściach urojonych.

W powyższym twierdzeniu *liczby zespolone* rozumiemy jako liczby postaci  $r_0 + r_1\mathbf{i}$ , ale także  $r_0 + r_1\mathbf{j}$  lub  $r_0 + r_1\mathbf{k}$ . Liczby te są parami równoważne, ponieważ

$$\begin{aligned} r_0 + r_1\mathbf{j} &= q_{\mathbf{k}} \cdot (r_0 + r_1\mathbf{i}) \cdot q_{\mathbf{k}}^{-1} \quad \text{dla} \quad q_{\mathbf{k}} = 1 + \mathbf{k}, \\ r_0 + r_1\mathbf{k} &= q_{\mathbf{j}}^{-1} \cdot (r_0 + r_1\mathbf{i}) \cdot q_{\mathbf{j}} \quad \text{dla} \quad q_{\mathbf{j}} = 1 + \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Szczególnym przypadkiem są tzw. *macierze hermitowskie* tzn. macierze  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n \times n}$  takie, że  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$ . Otrzymujemy wówczas ciekawy rezultat, znany również dla macierzy zespolonych, przytoczony za [79].

**Twierdzenie 2.25.** *Niech  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n \times n}$  będzie taka, że  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$ . Wówczas*

- (a)  $\mathbf{B}$  ma dokładnie  $n$  (razem z krotnościami) wartości własnych  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , które są liczbami rzeczywistymi;
- (b) prawe wektory własne  $\mathbf{x}_k$  i  $\mathbf{x}_\ell$  odpowiadające różnym wartościom własnym  $\lambda_k$  i  $\lambda_\ell$  są ortogonalne, tzn.  $\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_\ell \rangle = 0$ ;
- (c) istnieje baza w  $\mathbb{H}^n$ ,  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , złożona z wektorów własnych macierzy  $\mathbf{B}$ , która jest ortonormalna, tzn.  $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell \rangle = 0$  dla  $k \neq \ell$  oraz  $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle = 1$ .

Oczywiście w przypadku macierzy hermitowskich nie ma potrzeby rozróżniania prawych i lewych wartości własnych. Powyższy wynik pozwoli na wyprowadzenie odpowiednich własności norm operatorowych między przestrzeniami  $\ell_p$  i  $\ell_q$ .

Dotychczas rozważaliśmy prawe (lub lewe) kwaternionowe przestrzenie wektorowe  $\mathbb{H}^n$  z normą  $\|\cdot\|_2$ . Podobnie jednak jak w przypadku klasycznych przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  lub  $\mathbb{C}^n$  możemy wprowadzać dowolne normy  $\ell_p$ , zgodnie z poniższą definicją [4, 15, 79].

**Definicja 2.26.** Niech  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{H}^n$  i  $p \in [1, \infty]$ . Normą  $\ell_p$  nazywamy funkcję

$$(2.22) \quad \|\cdot\|_p : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}; \quad \|\mathbf{x}\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} & \text{dla } p \in [1, \infty), \\ \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| & \text{dla } p = \infty. \end{cases}$$

**Fakt 2.27.** *Funkcja zadana wzorem (2.22) spełnia aksjomaty normy.*

Wzór (2.22) można rozszerzyć na  $p \in (0, 1)$ . Tak zdefiniowana funkcja  $\|\cdot\|_p$  spełnia wówczas aksjomaty *quasi-normy* (nie spełnia warunku trójkąta). Przyjmujemy także standardowe oznaczenie dla liczności nośnika wektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ .

DEFINICJA 2.28. *Nośnikiem* wektora  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{H}^n$  nazywamy zbiór indeksów niezerowych współrzędnych tego wektora, tzn.

$$(2.23) \quad \text{supp } \mathbf{x} := \{k \in \{1, \dots, n\} : x_k \neq 0\}.$$

Będziemy także stosować następującą notację

$$(2.24) \quad \|\mathbf{x}\|_0 := \#(\text{supp } \mathbf{x}),$$

gdzie  $\#A$  oznacza licznosc (moc) zbioru  $A$ . Przyjęło się nazywać powyższą wielkość *normą*  $\ell_0$ , choć jest to jedynie nazwa zwyczajowa (nie spełnia aksjomatów normy, ani nawet *quasi-normy*). Ma ona jednak swoje uzasadnienie – przechodząc do granicy  $p \rightarrow 0$  po prawej stronie wyrażenia

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k|^p$$

otrzymujemy moc nośnika sygnału  $\mathbf{x}$ . Chcąc być konsekwentnym, należałoby stosować notację  $\|\mathbf{x}\|_0^0$ , jednak zgodnie z przyjętą konwencją pomija się 0 w indeksie górnym.

Pozostało nam jeszcze wprowadzić normę operatorową (macierzową) przekształcenia liniowego  $\mathbf{A} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^m$ , wyznaczonego przez macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ .

DEFINICJA 2.29. Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  i  $1 \leq p, q \leq \infty$ . *Normą operatorową (macierzową)* przekształcenia  $\mathbf{A}$  między przestrzeniami  $\ell_p$  i  $\ell_q$  nazywamy

$$(2.25) \quad \|\mathbf{A}\|_{p \rightarrow q} := \sup_{\|\mathbf{x}\|_p \leq 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_q.$$

Tak jak w przypadku norm w abstrakcyjnych przestrzeniach liniowych, normę operatorową zadaną wzorem (2.25) można równoważnie zapisać w postaci

$$\|\mathbf{A}\|_{p \rightarrow q} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_q = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_q}{\|\mathbf{x}\|_p}.$$

Szczególnym przypadkiem są tutaj normy w przestrzeniach unitarnych. Można wówczas scharakteryzować normę operatorową między  $\ell_2$  i  $\ell_2$  dla macierzy hermitowskich. Wykorzystuje się w tym celu własności prawych wartości i wektorów własnych macierzy hermitowskich omawianych wcześniej. Jest to wynik istotny z punktu widzenia teorii oszczędnego próbkowania i zostanie wykorzystany w Sekcji 4. Przytaczamy go za pracami [4, 15].

TWIERDZENIE 2.30. *Niech*  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n \times n}$  *będzie taka, że*  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$ . *Wówczas*

$$(2.26) \quad \|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} |\langle \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}} \frac{|\langle \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

DOWÓD. Jak wspomniano już we wcześniejszych rozważaniach, kwaternionowa macierz hermitowska ma rzeczywiste wartości własne  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , w szczególności są to prawe wartości własne. Ponadto, istnieje ortonormalna baza  $\mathbb{H}^n$  złożona z wektorów własnych  $\mathbf{x}_k$  odpowiadających wartościom własnym  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , tzn.

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k\lambda_k \quad \text{oraz} \quad \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_\ell \rangle = \mathbf{x}_\ell^* \mathbf{x}_k = \delta_{k,\ell} \quad \text{dla} \quad k, \ell = 1, \dots, n,$$

gdzie  $\delta_{k,\ell} = 1$ , gdy  $k = \ell$  i  $\delta_{k,\ell} = 0$ , gdy  $k \neq \ell$ .

Oznaczmy  $\lambda_{\max} = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$ . Wówczas  $\|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2} = \lambda_{\max}$ . Rzeczywiście, dla dowolnego wektora  $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \alpha_k \in \mathbb{H}^n$  takiego, że  $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = 1$ , mamy

$$\|\mathbf{B}\mathbf{x}\|_2^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{B}\mathbf{x}_k \alpha_k \right\|_2^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \lambda_k \alpha_k \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k \alpha_k|^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \lambda_{\max},$$

a dla odpowiedniego wektora własnego  $\mathbf{x}_\ell$  dla którego  $|\lambda_\ell| = \lambda_{\max}$ , otrzymujemy

$$\|\mathbf{B}\mathbf{x}_\ell\|_2 = \|\mathbf{x}_\ell \lambda_\ell\|_2 = \lambda_{\max} \|\mathbf{x}_\ell\|_2 = \lambda_{\max}.$$

Z drugiej strony, ponieważ wartości własne są rzeczywiste, a wektory  $\mathbf{x}_k$  parami ortonormalne, mamy

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \mathbf{x}^* \mathbf{B}\mathbf{x} = \left( \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \alpha_k \right)^* \left( \sum_{\ell=1}^n \mathbf{B}\mathbf{x}_\ell \alpha_\ell \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \mathbf{x}_k^* \right) \left( \sum_{\ell=1}^n \mathbf{x}_\ell \lambda_\ell \alpha_\ell \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \lambda_k \alpha_k \stackrel{\lambda_k \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k |\alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$|\langle \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle| \leq \lambda_{\max} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \lambda_{\max}.$$

Ponownie, dla odpowiedniego wektora własnego w ostatniej nierówności otrzymujemy równość, co daje poszukiwany wynik.  $\square$

Sekcja ta pokazała, że algebra kwaternionów jest naturalnym uogólnieniem ciała liczb rzeczywistych i zespolonych. Wiele pojęć i twierdzeń bezpośrednio przenosi się z algebr niższego rzędu. Własności te znajdują bezpośrednie zastosowanie w dowodach twierdzeń będących podstawą teorii oszczędnego próbkowania. Jak się jednak okazuje, można pójść dalej, zwiększając rząd algebry i przez to tracąc kolejne własności mnożenia. Stosując nieco mniej intuicyjne podejście można jednak udowodnić wiele analogicznych własności, które przytoczyliśmy w tej sekcji.

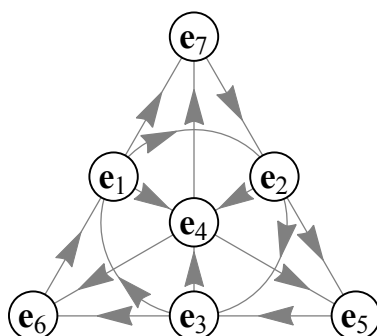


**2.2. Algebra oktonionów.** Wprowadzimy teraz algebrę oktonionów, definiując najważniejsze działania w tej algebrze. Ponieważ w Rozdziale 2 będziemy zajmować się jedynie sygnałami skalarnymi (o wartościach oktonionowych), a nie wektorami, jak w przypadku kwaternionów, ograniczymy rozważania w tej sekcji do pewnych podstawowych własności algebry. W znacznej części są to twierdzenia analogiczne do tych znanych z algebry kwaternionów, zatem większość z nich pozostawimy bez dowodu. Obszerniejszy opis algebry oktonionów został przedstawiony m.in. w [6].

Oznaczmy przez  $\mathcal{O} = \{1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7\}$  ustaloną bazę w 8-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej  $\mathbb{O}$  (analogicznie jak w przypadku kwaternionów, będziemy utożsamiać przestrzeń  $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ ). Definiujemy mnożenie w  $\mathbb{O}$  zgodnie z regułami zamieszczonymi w Tab. 2.2 i przedstawionymi na Rys. 2.2 (*schemat Fano*).

$\cdot$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	-1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

TABELA 2.2. Reguły mnożenia w  $\mathbb{O}$ .



RYСУNEK 2.2. Schemat mnożenia jednostek urojonych w  $\mathbb{O}$ .

Wymagamy dodatkowo, by mnożenie elementów z  $\mathbb{O}$  było rozdzielne względem dodawania, a także, by mnożenie przez skalary było przemienne, tzn.

$$(2.27) \quad x(y + z) = xy + xz, \quad (y + z)x = yx + zx, \quad x(\lambda y) = (\lambda x)y = \lambda(xy),$$

gdzie  $x, y, z \in \mathbb{O}$  oraz  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

DEFINICJA 2.31. Elementy zbioru  $\mathbb{O}$  wraz z operacjami algebraicznymi  $\mathbb{O}$  jako przestrzeni wektorowej nad ciałem  $\mathbb{R}$  oraz mnożeniem zdefiniowanym w Tab. 2.2 i za pomocą równości (2.27) nazywamy (*rzeczywistymi*) *oktonionami*. Elementy  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7$  będziemy nazywać kolejnymi *jednostkami urojonymi*.

Oktoniony powstały w wyniku oryginalnej *konstrukcji Cayleya-Dicksona* [37]. W ogólności algebry Cayleya-Dicksona definiuje się w sposób iteracyjny, rozpoczynając od ciała liczb zespolonych  $\mathbb{C}$ , tzn. algebry Cayleya-Dicksona rzędu 2 nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Korzystamy z faktu, że dowolną liczbę zespoloną możemy przedstawić jako uporządkowaną parę liczb rzeczywistych, tzn. utożsamiamy liczbę  $z = r_0 + r_1 \mathbf{i} \in \mathbb{C}$  z parą  $(r_0, r_1)$ . W ogólności elementy algebry rzędu  $2^n$  powstają jako pary elementów algebry  $2^{n-1}$ . Mnożenie jest zdefiniowane w następujący sposób:

$$(2.28) \quad (x_0, x_1) \cdot (y_0, y_1) = (x_0 \cdot y_0 - \overline{y_1} \cdot x_1, y_1 \cdot x_0 + x_1 \cdot \overline{x_0}),$$

gdzie  $x_0, x_1, y_0, y_1$  są elementami algebry rzędu  $2^{n-1}$ , a operację *sprzężenia* definiuje się jako

$$(2.29) \quad \overline{(x_0, x_1)} = (\overline{x_0}, -x_1).$$

Zauważmy, że algebra kwaternionów  $\mathbb{H}$  jest również przykładem algebry Cayleya-Dicksona rzędu  $2^2$ , tzn. możemy kwaterniony traktować jako pary liczb zespolonych. Oktoniony, jako algebra Cayleya-Dicksona rzędu  $2^3$ , są więc zbiorem uporządkowanych par kwaternionów, czy też uporządkowanych czwórek liczb zespolonych:

$$\mathbb{O} \ni o = (q_0, q_1) = ((z_{00}, z_{01}), (z_{10}, z_{11})), \quad q_0, q_1 \in \mathbb{H}, \quad z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11} \in \mathbb{C}.$$

Ponieważ każda liczba zespolona może być przedstawiona jako para liczb rzeczywistych, stąd otrzymujemy definicję oktonionu jako ósemki liczb rzeczywistych.

UWAGA 2.32. Mając na uwadze powyższą konstrukcję, możemy zapisać dowolny oktonion  $o \in \mathbb{O}$  w postaci sumy (zespolonej) dwóch kwaternionów, tzn.

$$o = q_0 + q_1 \cdot \mathbf{e}_4,$$

a ponieważ kwaterniony można przedstawić w postaci sumy zespolonej dwóch liczb zespolonych, otrzymujemy dalej

$$(2.30) \quad \begin{aligned} o &= (z_{00} + z_{01} \cdot \mathbf{e}_2) + (z_{10} + z_{11} \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_4 \\ &= ((r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1) + (r_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2) + ((r_4 + r_5 \cdot \mathbf{e}_1) + (r_6 + r_7 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_4 \\ &= r_0 + r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + r_2 \cdot \mathbf{e}_2 + r_3 \cdot \mathbf{e}_3 + r_4 \cdot \mathbf{e}_4 + r_5 \cdot \mathbf{e}_5 + r_6 \cdot \mathbf{e}_6 + r_7 \cdot \mathbf{e}_7. \end{aligned}$$

Podobnie jak dla kwaternionów, tak i dla oktonionów definiujemy pojęcia takie jak część rzeczywista czy urojona, a w konsekwencji również i sprzężenie oktonionów. Definicja sprzężenia jest równoważna tej, która wynika z konstrukcji Cayleya-Dicksona (2.29).

DEFINICJA 2.33. Niech  $o \in \mathbb{O}$  będzie postaci (2.30). Liczbę  $r_0 \in \mathbb{R}$  nazywamy *częścią rzeczywistą* (skalarną) oktonionu, natomiast  $r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + r_7 \cdot \mathbf{e}_7$  nazywamy *częścią urojoną* (wektorową) oktonionu. Będziemy oznaczać

$$\operatorname{Re}(o) := r_0, \quad \operatorname{Im}(o) := r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + r_7 \cdot \mathbf{e}_7.$$

Oktoniony  $o \in \mathbb{O}$  takie, że  $\operatorname{Re}(o) = 0$  nazywamy *czystymi oktonionami*.

Jeśli nie będzie to budziło wątpliwości, to skrótowo będziemy oznaczać  $\mathbf{o} := \operatorname{Im}(o)$ . Wówczas  $o = r_0 + \mathbf{o}$ . Zauważmy, że  $\mathbf{o}$  możemy utożsamiać z wektorem w przestrzeni  $\mathbb{R}^7$ .

DEFINICJA 2.34. Niech  $o \in \mathbb{O}$ . *Sprzężeniem* (oktonionowym)  $o$  nazywamy funkcję

$$\overline{(\cdot)} : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}, \quad \bar{o} := \operatorname{Re}(o) - \operatorname{Im}(o).$$

FAKT 2.35. Niech  $o \in \mathbb{O}$ . Zachodzą poniższe wzory:

$$(2.31) \quad \operatorname{Re}(o) = \frac{o + \bar{o}}{2}, \quad \operatorname{Im}(o) = \frac{o - \bar{o}}{2}.$$

UWAGA 2.36. Sprzężenie oktonionowe jest involucją, tzn. jest funkcją  $\mathbb{R}$ -liniową i zachodzą własności  $\bar{\bar{o}} = o$  oraz  $\overline{o_1 \cdot o_2} = \bar{o}_2 \cdot \bar{o}_1$ .

Jak można łatwo zauważyć, konsekwencją utożsamienia algebry  $\mathbb{O}$  z przestrzenią  $\mathbb{R}^8$  jest wprowadzenie definicji normy liczby oktonionowej w taki sam sposób, w jaki wprowadza się pojęcie normy dla dowolnych rzeczywistych przestrzeni  $n$ -wymiarowych [6, 87].

DEFINICJA 2.37. Niech  $o \in \mathbb{O}$  będzie postaci (2.30). *Normą*  $o$  nazywamy funkcję

$$|\cdot| : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad |o| := \sqrt{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2}.$$

Oktoniony  $o \in \mathbb{O}$  takie, że  $|o| = 1$  nazywamy *oktonionami jednostkowymi*.

FAKT 2.38. Niech  $o, o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wówczas

- (a)  $|o| = 0 \Leftrightarrow o = 0$ ,
- (b)  $|\lambda \cdot o| = |\lambda| \cdot |o|$ ,
- (c)  $|o_1 + o_2| \leq |o_1| + |o_2|$ .

FAKT 2.39. Niech  $o \in \mathbb{O}$ . Wówczas

- (a)  $|o|^2 = o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o$ ,
- (b)  $|o| = |\bar{o}| = |-o|$ .

Mnożenie liczb zespolonych miało wszystkie własności znane z mnożenia liczb rzeczywistych. Definiując liczby kwaternionowe okazało się, że mnożenie jest w tym przypadku nieprzemienne, jednak nadal jest łączne. Zwiększając rząd algebry i definiując oktoniony tracimy kolejne własności.

UWAGA 2.40. Oktoniony tworzą *niełączną* i *nieprzemiennej* algebrę 8. rzędu nad ciałem liczb rzeczywistych. Zatem, w ogólności

$$(o_1 \cdot o_2) \cdot o_3 \neq o_1 \cdot (o_2 \cdot o_3), \quad o_1 \cdot o_2 \neq o_2 \cdot o_1.$$

Jednak dla  $i, j, k \in \{1, \dots, 7\}$  parami różnych zachodzą równości

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k), \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i.$$

Ponadto  $\mathbb{O}$  jest *algebrą alternatywną* (ang. *alternative algebra*), tzn. dla dowolnych dwóch  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$  zachodzą

$$(2.32) \quad o_1 \cdot (o_1 \cdot o_2) = (o_1 \cdot o_1) \cdot o_2, \quad o_1 \cdot (o_2 \cdot o_2) = (o_1 \cdot o_2) \cdot o_2,$$

a także *elastyczną* (ang. *flexible algebra*), tzn. dla dowolnych  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$  zachodzi

$$o_1 \cdot (o_2 \cdot o_1) = (o_1 \cdot o_2) \cdot o_1.$$

FAKT 2.41. *Niech  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ . Wówczas*

- (a)  $\overline{o_1 \cdot o_2} = \overline{o_2} \cdot \overline{o_1}$ ,
- (b)  $|o_1 \cdot o_2| = |o_1| \cdot |o_2|$ .

Warto zauważyć, że wszystkie rozważane do tej pory własności nie wymagały łączności mnożenia, zatem ich dowody są identyczne jak w przypadku analogicznych własności dla kwaternionów, tzn. Faktów 2.4, 2.7, 2.8 oraz 2.10.

FAKT 2.42. *Dla każdego niezerowego  $o \in \mathbb{O}$  istnieje (dokładnie jeden) element odwrotny  $o^{-1} \in \mathbb{O}$ , tzn. taki że*

$$o \cdot o^{-1} = o^{-1} \cdot o = 1.$$

Ponadto  $o^{-1} = \frac{\bar{o}}{|o|^2}$  i dla  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ ,  $o_1, o_2 \neq 0$ , zachodzi wzór  $(o_1 \cdot o_2)^{-1} = o_2^{-1} \cdot o_1^{-1}$ .

DOWÓD. Dowód przebiega w sposób klasyczny, tak jak dowód Faktu 2.11. Należy jedynie zastanowić się nad jednoznacznością elementu odwrotnego. Przypuśćmy zatem, że istnieją  $o', o'' \in \mathbb{O}$  takie, że  $o' \cdot o = o \cdot o'' = 1$ . Wówczas, korzystając z alternatywności algebry  $\mathbb{O}$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{o} &= 1 \cdot \bar{o} = (o' \cdot o) \cdot \bar{o} = |o|^2 \cdot o' \quad \Rightarrow \quad o' = \frac{\bar{o}}{|o|^2} = o^{-1}, \\ \bar{o} &= \bar{o} \cdot 1 = \bar{o} \cdot (o \cdot o'') = |o|^2 \cdot o'' \quad \Rightarrow \quad o'' = \frac{\bar{o}}{|o|^2} = o^{-1}. \end{aligned}$$

Kończy to dowód. □

Powyższy fakt pozwala na jednoznaczne zdefiniowanie dzielenia oktonionów. Podobnie jednak jak w przypadku kwaternionów, nieprzemienność mnożenia sprawia, że należy zdefiniować zarówno dzielenie *prawe* jak i *lewe*, tzn. dla  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ ,  $o_2 \neq 0$ , definiujemy

$$o_1/o_2 := o_1 o_2^{-1} = \frac{o_1 \cdot \overline{o_2}}{|o_2|^2}, \quad o_2 \backslash o_1 := o_2^{-1} o_1 = \frac{\overline{o_2} \cdot o_1}{|o_2|^2}.$$

Oktoniony są więc również *algebrą z dzieleniem* (ang. *division algebra*).

Podobnie jak w przypadku kwaternionów, można wprowadzić grupę pewnych działań na oktonionach, które pojawiły się również w pracy [16].

DEFINICJA 2.43. Niech  $o \in \mathbb{O}$ . Funkcje  $\alpha_i : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ , definiujemy jako

$$(2.33) \quad \alpha_i(o) := -\mathbf{e}_i \cdot (o \cdot \mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, 7,$$

gdzie  $\cdot$  jest mnożeniem oktonionów.

LEMAT 2.44. *Zachodzą poniższe wzory*

$$(2.34) \quad \forall_{i \in \{1, \dots, 7\}} \quad \alpha_i(1) = 1,$$

$$(2.35) \quad \forall_{i, j \in \{1, \dots, 7\}, i \neq j} \quad \alpha_i(\mathbf{e}_j) = -\mathbf{e}_j,$$

$$(2.36) \quad \forall_{i \in \{1, \dots, 7\}} \quad \alpha_i(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i.$$

DOWÓD. Własność (2.34) wynika bezpośrednio z definicji. Aby wykazać (2.35) wykorzystamy Fakt 2.41 i własność alternatywności (2.32) algebry  $\mathbb{O}$ . Dla dwóch różnych jednostek urojonych mamy

$$\alpha_i(\mathbf{e}_j) = -\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j.$$

Własność (2.36) wynika z faktu, że dla dowolnej jednostki urojonej  $\mathbf{e}_i$  mamy  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = -1$ . Stąd

$$\alpha_i(\mathbf{e}_i) = -\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i.$$

Kończy to dowód. □

LEMAT 2.45. *Funkcje  $\alpha_i$  są  $\mathbb{R}$ -liniowymi funkcjami zmiennej oktonionowej, tzn. jeśli  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$  oraz  $A, B \in \mathbb{R}$ , to wówczas*

$$(2.37) \quad \alpha_i(A \cdot o_1 + B \cdot o_2) = A \cdot \alpha_i(o_1) + B \cdot \alpha_i(o_2).$$

DOWÓD. Dowód (2.37) wynika z bezpośredniego rachunku

$$\begin{aligned} \alpha_i(A \cdot o_1 + B \cdot o_2) &= -\mathbf{e}_i \cdot ((A \cdot o_1 + B \cdot o_2) \cdot \mathbf{e}_i) \\ &= -\mathbf{e}_i \cdot (A \cdot o_1 \cdot \mathbf{e}_i + B \cdot o_2 \cdot \mathbf{e}_i) \\ &= -A \cdot \mathbf{e}_i \cdot (o_1 \cdot \mathbf{e}_i) - B \cdot \mathbf{e}_i \cdot (o_2 \cdot \mathbf{e}_i) \\ &= A \cdot \alpha_i(o_1) + B \cdot \alpha_i(o_2). \end{aligned}$$

Kończy to dowód. □

DEFINICJA 2.46. Niech  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, 7\}$ . Definiujemy funkcję  $\alpha_{i_1, \dots, i_k}: \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$  wzorem

$$\alpha_{i_1, \dots, i_k}(o) = (\alpha_{i_1} \circ \dots \circ \alpha_{i_k})(o),$$

dla  $o \in \mathbb{O}$ , gdzie  $\circ$  jest klasycznym złożeniem funkcji.

LEMAT 2.47. Niech  $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k\}$ ,  $i, j, k \in \{1, \dots, 7\}$ , będą jedną z siedmiu oktonionowych trójek, które tworzą łączne, kwaternionowe, nieprzemienne podciało algebry  $\mathbb{O}$ . Wówczas  $\alpha_{i,j,k}: \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$  jest oktonionową anty-inwolucją.

DOWÓD. Liniowość  $\alpha_{i,j,k}$  wynika z liniowości każdej funkcji  $\alpha_\ell$ , a to, że  $\alpha_{i,j,k}$  jest swoją własną odwrotnością, jest oczywiste. Dowód, że dla dowolnych  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$  mamy

$$\alpha_{i,j,k}(o_1 \cdot o_2) = \alpha_{i,j,k}(o_1) \cdot \alpha_{i,j,k}(o_2)$$

wynika z bezpośredniego i skrupulatnego rachunku. □

UWAGA 2.48. Wybór trójek  $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k\}$  w powyższym lemacie nie jest przypadkowy. Własność ta nie jest prawdziwa dla pozostałych 28 oktonionowych trójek.

UWAGA 2.49. Warto zauważyć, że dowolna funkcja  $\alpha_{i,j,k}$  zmienia znak współczynników stojących przy czterech pozostałych jednostkach urojonych, tzn. jednostkach  $\mathbf{e}_\ell$  takich, że  $\ell \in \{1, \dots, 7\} \setminus \{i, j, k\}$ .

W przypadku liczb zespolonych oraz kwaternionów istniała naturalna interpretacja geometryczna. Liczby zespolone można przedstawić za pomocą punktu na płaszczyźnie, natomiast część urojona kwaternionu jest wektorem w przestrzeni 3-wymiarowej [73, 76]. Oktoniony, jako elementy przestrzeni 8-wymiarowej, wymagają dużo bardziej abstrakcyjnego podejścia.

Przeprowadzając analogiczny rachunek jak dla kwaternionów można jednak wykazać, że dowolny niezerowy oktonion  $o \in \mathbb{O}$  da się zapisać w postaci trygonometrycznej

$$(2.38) \quad o = |o| \cdot (\cos \theta + \boldsymbol{\mu} \cdot \sin \theta),$$

gdzie  $\boldsymbol{\mu} = \frac{\text{Im } o}{|\text{Im } o|}$ , a  $\theta \in \mathbb{R}$  jest rozwiązaniem układu równań

$$(2.39) \quad \cos \theta = \frac{\text{Re}(o)}{|o|}, \quad \sin \theta = \frac{|\text{Im } o|}{|o|}.$$

Kąt  $\theta$  interpretujemy wówczas jako kąt między osią rzeczywistą (podprzestrzenią  $\mathbb{R}$  przestrzeni  $\mathbb{O}$ ), a wektorem  $\boldsymbol{\mu} \cdot \sin \theta$  (rzutem oktonionu  $o$  na podprzestrzeń  $\mathbb{R}^7$  przestrzeni  $\mathbb{O}$ ).

Podobnie jak dla kwaternionów, aby móc zdefiniować oktonionową transformację Fouriera, należy najpierw wprowadzić definicję funkcji wykładniczej. Definicja ta jest identyczna jak dla kwaternionów, tzn. dla  $o \in \mathbb{O}$  funkcję wykładniczą oktonionu nazywamy

$$\exp(o) = e^o := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{o^n}{n!},$$

gdzie  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  jest liczbą Eulera [76]. Prawdziwe dla  $o = r_0 + \mathbf{o} \in \mathbb{O}$  pozostaje również Twierdzenie 2.13 oraz Uwaga 2.14. Można dzięki nim zdefiniować także postać wykładniczą oktonionu  $o \in \mathbb{O}$ ,  $o \neq 0$  jako

$$o = |o| \cdot e^{\theta \boldsymbol{\mu}},$$

gdzie  $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{o}}{|\mathbf{o}|}$  oraz  $\theta \in [0, \pi]$  jest rozwiązaniem układu równań (2.39). Wprowadzamy także równoważne definicje funkcji trygonometrycznych argumentu rzeczywistego, tzn.

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{\boldsymbol{\mu}\alpha} + e^{-\boldsymbol{\mu}\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2\boldsymbol{\mu}} (e^{\boldsymbol{\mu}\alpha} - e^{-\boldsymbol{\mu}\alpha}),$$

gdzie  $\boldsymbol{\mu}$  jest dowolnym jednostkowym oktonionem o zerowej części rzeczywistej, tak jak dla kwaternionów.

W przypadku kwaternionów Bülow zaproponował alternatywną wykładniczą reprezentację, opisaną w Twierdzeniu 2.15. Dla oktonionów taka alternatywna postać, która zawierałaby pewne odpowiedniki kątów Eulera nie jest znana. Hahn i Snopek zaproponowali hipotezę na temat takiej reprezentacji [56], tzn.

$$o = |o| e^{\phi_1 \mathbf{e}_1} e^{\phi_3 \mathbf{e}_3} e^{\phi_2 \mathbf{e}_2} e^{\phi_7 \mathbf{e}_7} e^{\phi_4 \mathbf{e}_4} e^{\phi_6 \mathbf{e}_6} e^{\phi_5 \mathbf{e}_5},$$

gdzie użyto siedmiu różnych kątów  $\phi_i$ . Hipoteza ta nigdy nie została udowodniona, a w literaturze można znaleźć jedynie pewną dyskusję na temat poprawności użytych wzorów. Eksperymenty numeryczne sugerują, że kąty zdefiniowane w [56] są dobrym przybliżeniem prawdziwych wartości [56, 87]. Pojawiły się również pierwsze prace, w których podejmowane są próby rozwiązania tego problemu [65]. Wciąż jest to jednak problem otwarty.

Rozważania w tym rozdziale należy zakończyć komentarzem na temat różniczkowania i całkowania funkcji o wartościach oktonionowych. Jednak, podobnie jak w przypadku funkcji o wartościach kwaternionowych, ograniczymy się jedynie do funkcji zmiennej rzeczywistej, tzn.

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + u_7(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_7, \quad u_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, 7.$$

Wówczas pochodne (zwykajne w przypadku  $n = 1$  i cząstkowe dla  $n > 1$ ) oraz całkę (jedno- i wielowymiarową) definiujemy „po współrzędnych”, tzn. jako funkcję (lub liczbę) o wartościach oktonionowych, której część rzeczywista i części urojone są pochodnymi lub całkami odpowiednich składowych funkcji  $u$ .

Stosując konstrukcję Cayleya-Dicksona lub Clifforda można skonstruować algebry hiperzespolone dowolnie wysokich rzędów, jednak jak mogliśmy zaobserwować w tym rozdziale, im wyższy rząd algebry, tym gorsze własności mnożenia. Pewne informacje na temat algebr wyższych rzędów (np. sedenionów, tzn. algebry Cayleya-Dicksona rzędu  $2^4$ ) można znaleźć w pracy [87]. Należy jednak pamiętać, że ciało liczb rzeczywistych, ciało liczb zespolonych, algebra kwaternionów i algebra oktonionów stanowią jedyne (z dokładnością do izomorfizmu) unormowane algebry z dzieleniem [6]. Znacznie ogranicza to możliwości praktycznego zastosowania algebr wyższych rzędów. W dalszej części pracy będziemy więc wykorzystywać jedynie algebrę kwaternionów i oktonionów.

---

Rozważania przedstawione we Wstępie stanowią naturalne wprowadzenie do zagadnień teoretycznych przedstawionych w kolejnych rozdziałach. Twierdzenia dotyczące własności kwaternionowych prawostronnych przestrzeni wektorowych zostaną bezpośrednio wykorzystane w dowodach głównych autorskich wyników w teorii oszczędnego próbkowania (w szczególności w Twierdzeniu 4.7 oraz Twierdzeniu 4.15). Z kolei opisane własności oktonionów w bezpośredni sposób przekładają się na własności oktonionowej transformacji Fouriera i sprawiają, że dowody przedstawione w Sekcji 7 oraz 8 nie są tak proste, jak w przypadku klasycznej transformacji Fouriera.

Większość faktów, które zostały zaprezentowane w tym rozdziale, to twierdzenia znane z literatury lub wyniki prostych ćwiczeń z algebry ogólnej. Warto jednak zaznaczyć, że charakteryzacja kwaternionowego odpowiednika iloczynu skalarnego za pomocą równości polaryzacyjnej (Twierdzenie 2.22) jest wynikiem autorskim, który powstał niezależnie od tego znanego z literatury. Jest to także kluczowy składnik dowodu jednego z twierdzeń w Sekcji 4 (Lemat 4.5), a także twierdzeń opisywanych we wcześniejszych pracach [3, 15]. Można tam znaleźć także nieco inną postać wzoru polaryzacyjnego.



## ROZDZIAŁ 1

### **Kwaterniony w teorii oszczędnego próbkowania**

W tej części pracy skupimy się na zastosowaniu algebry kwaternionów, która została opisana w Sekcji 2.1, w szczególnej dziedzinie teorii sygnałów, tzn. w teorii oszczędnego próbkowania. Jest to dziedzina stosunkowo nowa – pierwsze prace opublikowano około 2005 roku, a prace dotyczące wykorzystania w niej algebry kwaternionów pojawiły się około 2012 roku. Mimo że powstanie teorii oszczędnego próbkowania zostało zainspirowane przez praktyczne zastosowania m.in. w medycznej diagnostyce obrazowej, to bardzo szybko dziedzina ta zyskała popularność zarówno w środowisku inżynierów, jak i matematyków. Ze względu na rosnące zainteresowanie aplikacjami kwaternionów w przetwarzaniu sygnałów (w szczególności obrazów kolorowych) wydaje się, że idea rozszerzenia teorii oszczędnego próbkowania na tę algebrę wydaje się w pełni uzasadniona.

Narzędzia matematyczne, które są stosowane w tych rozważaniach leżą na pograniczu wielu dziedzin. Podstawę stanowią własności algebraiczne kwaternionów i macierzy o elementach kwaternionowych, którym poświęcona była Sekcja 2.1, istotne są jednak również klasyczne narzędzia probabilistyczne. Część z nich została opisana w Dodatku A, który jest ściśle związany z opisywanymi wynikami.

Rozdział ten składa się z trzech sekcji. W Sekcji 3 prezentujemy historyczne aspekty teorii oszczędnego próbkowania, tzn. pierwsze osiągnięcia w tej dziedzinie, które stanowią jednocześnie podstawę prac przedstawionych w rozprawie. Sekcja 4 poświęcona jest uogólnieniu klasycznych wyników teorii na przypadek sygnałów i macierzy kwaternionowych. Wykażemy podstawowy wynik tej dziedziny, tzn. twierdzenie o stabilnej rekonstrukcji wektorów kwaternionowych z liniowych pomiarów o współczynnikach kwaternionowych oraz przeprowadzimy analizę kwaternionowych losowych macierzy gaussowskich. Głównym wynikiem naukowym tego rozdziału jest wykazanie, że kwaternionowe macierze gaussowskie mają (z dużym prawdopodobieństwem) własność ograniczonej izometrii. Rozdział podsumujemy kilkoma eksperymentami numerycznymi w Sekcji 5, które zobrazują twierdzenia przedstawione we wcześniejszej części.

### 3. Podstawy teorii oszczędnego próbkowania – wstęp historyczny

Ze względu na dostępny aparat matematyczny sygnały, które spotykamy na co dzień, modeluje się za pomocą funkcji ciągłych (kawałkami ciągłych, a bardzo często nawet gładkich) zmiennej ciągłej. Współczesna technika wymusza jednak patrzenie na sygnał jak na ciąg próbek. Musimy dokonywać pewnej dyskretyzacji zarówno dziedziny sygnału, jak i jego wartości, tzn. poddawać sygnał próbkowaniu oraz kwantyzacji.

Podstawą konwencjonalnych technik próbkowania sygnałów jest analiza fourierowska oraz klasyczne Twierdzenie Kotielnikowa-Shannona o próbkowaniu [2, 92], które mówi, że aby sygnał mógł być zrekonstruowany z pełną dokładnością, to musi być próbkowany z częstotliwością co najmniej dwukrotnie większą od największej częstotliwości występującej w sygnale (z tzw. częstotliwością Nyquista). Jest to warunek stosowany w wielu schematach pomiarowych wykorzystywanych wspólnie, np. w urządzeniach audio-wideo czy w urządzeniach diagnostyki medycznej.

Zauważmy jednak, że w rzeczywistości trudno oczekiwać, by sygnał, który zamierzamy zmierzyć, miał ograniczone widmo. Częstotliwość próbkowania jest wówczas zdeterminowana przez rozdzielczość (czasową lub przestrzenną), jaką chcemy uzyskać, a jednym ze składników systemów pomiarowych są dolnoprzepustowe filtry anty-aliasingowe, które ograniczają widmo sygnału. Twierdzenie Kotielnikowa-Shannona jest więc również (choć pośrednio) wykorzystywane w takich przypadkach.

Można zatem na mierzone sygnały patrzeć jak na ciąg próbek. W przypadku sygnałów o ograniczonym nośniku będą to skończone ciągi, czyli wektory z pewnej przestrzeni skończenie-wymiarowej. Często proces akwizycji danych jest liniowy, co możemy sformalizować w postaci prostego układu równań liniowych

$$(3.1) \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  jest badanym sygnałem,  $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^m$  jest wektorem zaobserwowanych danych, a macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  modeluje liniowy proces pomiarowy, gdzie najczęściej  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  lub  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Chcąc odzyskać informacje na temat oryginalnego sygnału  $\mathbf{x}$ , musimy zatem rozwiązać powyższy układ równań.

Z algebry liniowej wiadomo, że jednoznaczne rozwiązanie powyższego równania jest możliwe tylko, gdy  $m \geq n$  (przy założeniu, że pomiar nie dostarczy sprzecznych informacji, co jest naturalnym podejściem). Jednak proces pomiarowy jest zwykle drogi i czasochłonny, co wymusza  $m < n$ . Wiadomo, że wówczas jeśli układ równań (3.1) będzie miał przynajmniej jedno rozwiązanie, to będzie miał ich nieskończenie wiele. Niemożliwe jest zatem (w ogólnym przypadku) jednoznaczne zrekonstruowanie wektora  $\mathbf{x}$  z danych  $\mathbf{y}$ .

Zauważmy jednak, że wiele sygnałów występujących na co dzień to sygnały, które są *rzadkie* lub *kompresowalne* w odpowiedniej bazie. Klasycznym przykładem jest tutaj reprezentacja falkowa obrazów – nawet jeśli w obrazie niemal nie występują piksele

o zerowej wartości, to większość współczynników jego transformaty falkowej jest bliska zeru. Skutkuje to tym, że rekonstruując obraz z zaledwie 1% największych (co do modułu) współczynników reprezentacji falkowej (tzn. zastępując 99% współczynników zerami) ludzkie oko najczęściej nie zaobserwuje żadnej utraty informacji. Jest to główna przyczyna sukcesu, jaki odnoszą współcześnie wszelkie techniki kompresji, np. JPEG-2000 [94].

Powyższe własności sygnałów przyczyniły się do powstania fundamentalnego pytania – czy trzeba zbierać tak dużą ilość informacji, by zrekonstruować sygnał, którego większość współrzędnych (w pewnej bazie) można odrzucić bez zauważalnej utraty jakości? Stanowiło to inspirację do stworzenia teorii *oszczędnego próbkowania* (ang. *compressed sensing, compressive sampling*), w której łączy się teorię akwizycji sygnałów (tzn. teorię próbkowania) z teorią kompresji. Autorstwo tej teorii należy przypisać Emmanuelowi Candèsowi, który, wraz z Justinem Rombergiem oraz Terencem Tao, opisał własności, jakie muszą spełniać macierze pomiarowe, by możliwa była jednoznaczna rekonstrukcja pewnych klas sygnałów z niewielkiej ilości danych.

Źródłem idei, jakie przyświecały autorom pierwszych publikacji z teorii oszczędnego próbkowania, były abstrakcyjne wyniki z analizy funkcjonalnej oraz teorii aproksymacji [70, 77, 78, 93]. Rzadkie reprezentacje i przybliżenia sygnałów również były badane od bardzo dawna, m.in. przez statystyków w analizie regresji [42, 75, 96], specjalistów z teorii aproksymacji [36, 95] czy też przez środowisko zajmujące się teorią sygnałów, w szczególności kompresją sygnałów dźwiękowych, obrazów czy filmów [94].

Jeden z pierwszych wyników tej teorii [25] zakładał konkretną postać macierzy  $\mathbf{A}$  z równości (3.1), tzn. macierzy częściowej dyskretnej transformacji Fouriera. Zostało to sformułowane w postaci poniższego twierdzenia [25, Theorem 1.1].

**TWIERDZENIE 3.1.** *Dany jest sygnał  $\mathbf{x}$  o długości  $n$ , gdzie  $n$  jest liczbą pierwszą. Niech  $\Omega$  będzie podzbiorem zbioru  $\{1, \dots, n\}$  i niech nośnik  $T$  sygnału  $\mathbf{x}$  będzie taki, że*

$$\#T \leq \frac{1}{2} \#\Omega,$$

*gdzie  $\#T$  oznacza licznosc zbioru  $T$ . Wówczas  $\mathbf{x}$  może być jednoznacznie zrekonstruowany ze współczynników swojej dyskretnej transformacji Fouriera o indeksach w zbiorze  $\Omega$ .*

*Odwrotnie, jeśli  $\Omega$  nie jest zbiorem  $\{1, \dots, n\}$ , to istnieją różne wektory  $\mathbf{x}_1$  oraz  $\mathbf{x}_2$ , których nośniki, oznaczone odpowiednio  $T_1$  i  $T_2$ , spełniają nierówność*

$$\#T_1, \#T_2 \leq \frac{1}{2} \#\Omega + 1,$$

*i których współczynniki dyskretnej transformacji Fouriera o indeksach w zbiorze  $\Omega$  pokrywają się.*

Był to wynik przełomowy głównie ze względu na możliwości zastosowania w technikach tomograficznych. W tomografii rezonansu magnetycznego dane, które obserwujemy, to współczynniki dyskretnej dwuwymiarowej transformacji Fouriera [10]. Należy jednak

zwrócić uwagę na ograniczenia powyższego twierdzenia. Jeśli  $n$  nie jest liczbą pierwszą, to teza Twierdzenia 3.1 nie zachodzi. Można jednak pokazać, że jeśli  $n$  nie jest liczbą pierwszą, a zbiory  $T$  i  $\Omega$  są wybrane w sposób losowy, to teza powyższego twierdzenia zachodzi z dużym prawdopodobieństwem.

Twierdzenie 3.1 nie mówi natomiast nic o metodach rekonstrukcji sygnału z wybranych próbek jego transformacji Fouriera. Autorzy [25] wykazali jednak, że sygnał  $\mathbf{x}$  można zrekonstruować rozwiązując problem optymalizacji

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{pod warunkiem} \quad \hat{\mathbf{z}}_\Omega = \hat{\mathbf{x}}_\Omega,$$

gdzie  $\hat{\mathbf{x}}_\Omega \in \mathbb{C}^n$  oznacza wektor, którego współrzędne o indeksach w zbiorze  $\Omega$  są równe odpowiednim współrzędnym dyskretnej transformaty Fouriera sygnału  $\mathbf{x}$ , a pozostałe współrzędne są zerowe. Zgodnie z notacją przyjętą w Sekcji 2.1,  $\|\mathbf{z}\|_0$  to liczba niezerowych współrzędnych wektora  $\mathbf{z}$ . Powyższy problem jest trudny obliczeniowo, więc zastępuje się go zagadnieniem efektywnym obliczeniowo, tzn. problemem optymalizacji wypukłej

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \hat{\mathbf{z}}_\Omega = \hat{\mathbf{x}}_\Omega,$$

gdzie  $\|\mathbf{z}\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|$  dla  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ . Autorzy pokazują, że przy pewnych dodatkowych założeniach na licznosci zbiorów  $\Omega$  i  $T$  powyższe dwa problemy są równoważne (z dużym prawdopodobieństwem).

W pracy [25] rozważano jedynie tzw. fourierowski schemat pomiarowy. Wynik ten jednak szybko uogólniono na macierze pomiarowe  $\mathbf{A}$ , które powstają poprzez wybranie pewnej liczby  $m$  wierszy z macierzy, której kolumny tworzą bazę ortonormalną [28]. Przy dodatkowych założeniach, o których powiemy później, sygnał może być jednoznacznie zrekonstruowany jako rozwiązanie problemu optymalizacji wypukłej

$$(3.2) \quad \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y},$$

gdzie  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Jednym z podstawowych założeń jest tzw. zasada jednostajnej nieoznaczoności.

**DEFINICJA 3.2.** Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Mówimy, że macierz  $A$  spełnia *zasadę jednostajnej nieoznaczoności* (ang. *uniform uncertainty principle* – UUP) z czynnikiem  $\lambda$ , jeśli istnieje pewna ustalona stała  $\rho > 0$  taka, że dla odpowiednio małych  $\alpha > 0$  poniższe stwierdzenie zachodzi z prawdopodobieństwem równym co najmniej  $1 - O(n^{\rho/\alpha})$ :

$$\frac{1}{2} \frac{m}{n} \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq \frac{3}{2} \frac{m}{n} \|\mathbf{x}\|_2^2$$

dla wszystkich  $\mathbf{x}$ , których nośnik ma licznosc mniejszą niż  $\alpha \cdot \frac{m}{\lambda}$ .

W kolejnych publikacjach warunek UUP przekształcił się i został sformułowany jako tzw. *własność ograniczonej izometrii* (ang. *restricted isometry property* – RIP), która w najnowszych publikacjach pojawia się częściej niż UUP [27].

DEFINICJA 3.3. Niech  $s \in \mathbb{N}_+$  oraz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Mówimy, że macierz  $\mathbf{A}$  ma *własność  $s$ -ograniczonej izometrii* (ang.  *$s$ -restricted isometry property* – RIP) ze stałą  $\delta_s \geq 0$ , jeśli

$$(3.3) \quad (1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2$$

dla wszystkich  $s$ -rzadkich wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ . Najmniejszą  $\delta_s \geq 0$  spełniającą powyższy warunek nazywamy *stałą  $s$ -ograniczonej izometrii* (ang.  *$s$ -restricted isometry constant*).

W praktycznych zastosowaniach problem (3.1) nie jest jednak wystarczający. Zauważmy, że dane pomiarowe, którymi dysponujemy zazwyczaj nie są dokładne, a jedynie przybliżone i są obciążone pewnym błędem  $\mathbf{e} = \mathbf{Ax} - \mathbf{y}$ . Możemy jednak założyć, że jesteśmy w stanie oszacować normę  $\ell_2$  tego błędu, tzn.  $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta$  dla pewnego ustalonego  $\eta \geq 0$ , gdzie  $\|\mathbf{e}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^m |e_i|^2 \right)^{1/2}$ ,  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)^T$ . Rozważany wcześniej problem minimalizacji sprowadza się wówczas do rozwiązania zagadnienia

$$(3.4) \quad \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta.$$

W tej sytuacji nie mamy możliwości dokładnego zrekonstruowania wektora  $\mathbf{x}$ , ale okazuje się, że możemy przybliżyć wartości jego współrzędnych z błędem, którego normę można oszacować w sposób zależny od  $\eta$ . Taki proces nazywamy *stabilną rekonstrukcją wektora z danych pomiarowych*. Mówi o tym poniższe twierdzenie, które przytaczamy za [22, Theorem 1.2, Theorem 1.3].

TWIERDZENIE 3.4. Niech macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  spełnia własność  $2s$ -ograniczonej izometrii ze stałą  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$  i niech  $\eta \geq 0$ . Wówczas dla dowolnego wektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  oraz wektora  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{e}$  takiego, że  $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta$ , rozwiązanie  $\mathbf{x}^\#$  problemu

$$(3.5) \quad \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$$

spełnia nierówność

$$(3.6) \quad \|\mathbf{x}^\# - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{|s}\|_1 + C_1 \eta$$

ze stałymi

$$C_0 = 2 \cdot \frac{1 + (\sqrt{2} - 1) \delta_{2s}}{1 - (\sqrt{2} + 1) \delta_{2s}}, \quad C_1 = \frac{4\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - (1 + \sqrt{2}) \delta_{2s}},$$

gdzie  $\mathbf{x}_{|s}$  oznacza najlepsze  $s$ -rzadkie przybliżenie wektora  $\mathbf{x}$ , tzn. wektor powstały z wektora  $\mathbf{x}$  poprzez pozostawienie jego  $s$  największych co do modułu współrzędnych oraz wyzerowanie pozostałych.

Jednym z zagadnień, które często pojawiają się w literaturze jest poprawienie założeń na stałe ograniczonej izometrii, które pozwolą na stabilną rekonstrukcję [21,26,34,52,53]. Szczegółowe rozważania na ten temat, wraz z uogólnieniem przedstawionych w tej sekcji wyników na algebrę kwaternionów, zostaną przeprowadzone w Sekcji 4.

#### 4. Teoria oszczędnego próbkowania w algebrze kwaternionów

Sekcja ta jest poświęcona uogólnieniu teorii oszczędnego próbkowania na przypadek sygnałów o wartościach w przestrzeniach kwaternionowych oraz pomiarów o kwaternionowych współczynnikach. Przez niemal dekadę badania w dziedzinie oszczędnego próbkowania skupiały się na sygnałach o wartościach w ciele liczb rzeczywistych lub zespolonych. Pojawiają się jednak coraz liczniejsze publikacje, w których prezentowane są wyniki numerycznych eksperymentów (zob. [8, 9, 62, 100]). Ich autorzy sugerują, że te techniki można z sukcesem stosować także dla sygnałów kwaternionowych. Zespół z Portugalii opublikował również wyniki prac teoretycznych [29, 54, 55], w których pokazuje, że teorię oszczędnego próbkowania dla szczególnego przypadku macierzy pomiarowych, tzn. dla macierzy częściowej dyskretnej transformacji Fouriera, można uogólnić na sygnały i pomiary kwaternionowe, w szczególności dla przypadku dyskretnej kwaternionowej transformacji Fouriera.

Duże zainteresowanie inżynierów technikami oszczędnego próbkowania w algebrze kwaternionów pokazuje, że istnieje naturalna potrzeba weryfikacji ich poprawności i głębszego zrozumienia. Do niedawna brakowało jednak prac teoretycznych, które wyjaśniłyby sukcesy wspomnianych eksperymentów. Celem badań przedstawionych w niniejszej pracy jest opracowanie teoretycznych podstaw oszczędnego próbkowania w algebrze kwaternionów. Na początku wprowadzimy podstawowe definicje w teorii oszczędnego próbkowania i skupimy się na własności ograniczonej izometrii. Lematy, które pokażemy, są podstawowym narzędziem w dowodzie głównego twierdzenia o stabilnej rekonstrukcji sygnału z danych zaszumionych, który przedstawimy w dalszej części. Rozważania te zostały opisane w artykułach [3, 4] oraz zaprezentowane w pracy magisterskiej [15].

Następnie skupimy się na rozważaniach dotyczących kwaternionowych gaussowskich macierzy losowych. Wiadomo, że gaussowskie macierze losowe o elementach rzeczywistych lub zespolonych mają (z dużym prawdopodobieństwem) własność ograniczonej izometrii, co jest kluczowym założeniem głównego twierdzenia teorii oszczędnego próbkowania. Prace eksperymentalne [100] pozwalały przypuszczać, że także rozważane macierze o elementach kwaternionowych mają tę własność, jednak dopiero wyniki przedstawione w tej pracy oraz w artykule [5] stanowią teoretyczne uzasadnienie tego faktu. Dowodowi tej własności poświęcona jest dalsza część sekcji.

Sekcja 4 powstała w wyniku prac prowadzonych wspólnie z dr Agnieszką Badeńską na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych PW. Część przedstawionych tu wyników została opisana w artykułach [3–5].

**4.1. Własność ograniczonej izometrii.** Rozważania na temat teorii oszczędnego próbkowania należy rozpocząć od uogólnienia podstawowych pojęć. Będziemy zajmować się sygnałami skończenie wymiarowymi o wartościach kwaternionowych, tzn. wektorami  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  (pojęcia *sygnał* i *wektor* będziemy używali zamiennie).

DEFINICJA 4.1. Wektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  nazywamy *s-rzadkim*, jeśli

$$(4.1) \quad \|\mathbf{x}\|_0 \leq s,$$

gdzie  $\|\mathbf{x}\|_0 = \#\text{supp } \mathbf{x}$ , tzn. ma co najwyżej  $s$  niezerowych współrzędnych.

Głównym zadaniem teorii oszczędnego próbkowania jest rekonstrukcja rzadkich wektorów z niewielkiej liczby pomiarów liniowych  $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^m$ , tzn. rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ . Jedną z metod poradzenia sobie z powyższym problemem jest rozwiązanie zadania optymalizacji wypukłej – minimalizacji normy  $\ell_1$ , tzn.

$$(4.2) \quad \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{H}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}.$$

Rozważamy również przypadek ogólniejszy, gdy pomiary obarczone są pewnym błędem  $\mathbf{e} \in \mathbb{H}^m$ , nad którego miarą jesteśmy w stanie panować, czyli

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad \text{gdzie} \quad \|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta,$$

dla pewnej ustalonej (znanej) liczby  $\eta \geq 0$ . W tak postawionym zagadnieniu nie jest możliwa dokładna rekonstrukcja sygnału  $\mathbf{x}$ , ale poszukujemy metody, która pozwoli nam na przybliżenie współrzędnych wektora z błędem, którego norma szacuje się w jakiś sposób przez  $\eta$  (tzn. rekonstrukcję w sposób stabilny). Rozwiązuje się wówczas zmodyfikowane zagadnienie minimalizacji normy  $\ell_1$

$$(4.3) \quad \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{H}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq \eta.$$

W Sekcji 3 podaliśmy, że w przypadku rzeczywistym i zespolonym warunkiem dostatecznym stabilnej rekonstrukcji wektorów rzadkich z pomiarów obarczonych błędem jest własność ograniczonej izometrii. Można definicję tej własności rozszerzyć na przypadek kwaternionowy.

DEFINICJA 4.2. Niech  $s \in \mathbb{N}_+$  oraz  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ . Mówimy, że macierz  $\mathbf{A}$  ma *własność s-ograniczonej izometrii* (ang. *s-restricted isometry property* – RIP) ze stałą  $\delta_s \geq 0$ , jeśli

$$(4.4) \quad (1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2$$

dla wszystkich  $s$ -rzadkich wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ . Najmniejszą liczbę  $\delta_s \geq 0$  spełniającą powyższy warunek nazywamy *stałą s-ograniczonej izometrii* (ang. *s-restricted isometry constant*).



Oszacowanie wartości stałej  $s$ -ograniczonej izometrii dla konkretnej macierzy jest zagadnieniem niezwykle trudnym, a skonstruowanie macierzy (deterministycznych) o określonych wymiarach, dla których stała ograniczonej izometrii spełnia pewne z góry narzucone oszacowanie jest wciąż problemem otwartym [53]. Jedną z istotniejszych gałęzi teorii oszczędnego próbkowania jest poszukiwanie oszacowań wartości stałej  $s$ -ograniczonej izometrii dla macierzy losowych, czym zajmiemy się w dalszej części tej sekcji.

Z drugiej strony chcielibyśmy wiedzieć jak duża może być ta stała, by możliwa była stabilna rekonstrukcja. Lematy 4.3 oraz 4.5, charakteryzujące stałe ograniczonej izometrii, są ważnym narzędziem w wykazaniu Twierdzenia 4.7 – jednego z głównych wyników w tej sekcji. Stanowią one uogólnienie analogicznych wyników dla wektorów i macierzy rzeczywistych oraz zespolonych i zostały przytoczone za [4, 15].

LEMAT 4.3. *Stala  $s$ -ograniczonej izometrii  $\delta_s$  macierzy  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  spełnia równość*

$$\delta_s = \max_{S \subseteq \{1, \dots, n\}, \#S \leq s} \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2},$$

gdzie  $\mathbf{Id}$  jest macierzą jednostkową i  $\mathbf{A}_S$  oznacza macierz powstałą z kolumn macierzy  $\mathbf{A}$  o indeksach w zbiorze  $S$ .

DOWÓD. Ustalmy  $s \in \{1, \dots, n\}$  oraz  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  takie, że  $\#S \leq s$ . Zauważmy, że warunek (4.4) można równoważnie zapisać w postaci

$$\left| \|\mathbf{A}_S \mathbf{x}\|_2^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2 \right| \leq \delta_s \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in \mathbb{H}^s,$$

gdzie  $\delta_s$  jest stałą  $s$ -ograniczonej izometrii macierzy  $\mathbf{A}$ . Lewa strona nierówności jest równa

$$\left| \|\mathbf{A}_S \mathbf{x}\|_2^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2 \right| = |\langle \mathbf{A}_S \mathbf{x}, \mathbf{A}_S \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle| = |\langle (\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|$$

i z Twierdzenia 2.30, ponieważ macierz  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}$  jest hermitowska, otrzymujemy

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^s \setminus \{0\}} \frac{|\langle (\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2}.$$

Z dowolności wyboru  $s$  oraz  $S$  otrzymujemy tezę.  $\square$

Z powyższego lematu wynika, że problem poszukiwania wartości stałej  $s$ -ograniczonej izometrii jest ściśle związany z poszukiwaniem wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}$  (jest to macierz hermitowska, więc nie ma potrzeby rozróżniać lewych i prawych wartości własnych) [79, 102]. Narzędziem stosowanym przy próbach oszacowania tej stałej (w przypadku rzeczywistym lub zespolonym) jest Twierdzenie Gershgorina o dysku [53], które uogólnia się również na macierze o elementach kwaternionowych [1].

TWIERDZENIE 4.4. *Niech  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{H}^{n \times n}$ . Wówczas wszystkie lewe wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  znajdują się w sumie  $n$  dysków Gershgorina, tzn. w zbiorze*

$$\Omega(\mathbf{A}) = \bigcup_{i=1}^n \left\{ q \in \mathbb{H} : |q - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| \right\}.$$

LEMAT 4.5. Niech  $\delta_s$  będzie stałą  $s$ -ograniczonej izometrii macierzy  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  dla dowolnego  $s \in \{1, \dots, n\}$ . Niech  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{H}^n$  będą takie, że  $\|\mathbf{x}_1\|_0 \leq s_1$  i  $\|\mathbf{x}_2\|_0 \leq s_2$  dla  $s_1 + s_2 \leq n$ , a ponadto  $\text{supp } \mathbf{x}_1 \cap \text{supp } \mathbf{x}_2 = \emptyset$ . Wówczas

$$|\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle| \leq \delta_{s_1+s_2} \|\mathbf{x}_1\|_2 \cdot \|\mathbf{x}_2\|_2.$$

DOWÓD. Niech  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{H}^n$  spełniają założenia lematu i dodatkowo niech będą takie, że  $\|\mathbf{x}_1\|_2 = \|\mathbf{x}_2\|_2 = 1$ . Ponieważ  $\mathbf{x}_1$  i  $\mathbf{x}_2$  mają rozłączne nośniki, to

$$\|\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2\|_2^2 = \|\mathbf{x}_1\|_2^2 + \|\mathbf{x}_2\|_2^2 = 2.$$

Niech  $q := \langle \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle$ , możemy wówczas przedstawić  $q$  w postaci wykładniczej, tzn.  $q = |q| e^{\mu\phi}$ , gdzie  $\mu$  jest kwaternionem jednostkowym o zerowej części rzeczywistej, a  $\psi$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Weźmy  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \cdot e^{-\mu\phi}$ , wówczas

$$|\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle| = |\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle \cdot e^{-\mu\phi}| = |\langle \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 \cdot e^{-\mu\phi}), \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle| = |\langle \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle|.$$

Ponieważ  $\langle \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle$  jest liczbą rzeczywistą, to z Twierdzenia 2.22 (wzór polaryzacyjny) otrzymujemy, że

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle = \frac{1}{4} \left( \|\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{A}\mathbf{x}_2\|_2^2 - \|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_2\|_2^2 \right).$$

Wektory  $\mathbf{y} \pm \mathbf{x}_2$  są  $(s_1 + s_2)$ -rzadkie, zatem z definicji RIP

$$(1 - \delta_{s_1+s_2}) \underbrace{\|\mathbf{y} \pm \mathbf{x}_2\|_2^2}_{=2} \leq \|\mathbf{A}\mathbf{y} \pm \mathbf{A}\mathbf{x}_2\|_2^2 = \|\mathbf{A}(\mathbf{y} \pm \mathbf{x}_2)\|_2^2 \leq (1 + \delta_{s_1+s_2}) \underbrace{\|\mathbf{y} \pm \mathbf{x}_2\|_2^2}_{=2},$$

a stąd

$$\|\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{A}\mathbf{x}_2\|_2^2 - \|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_2\|_2^2 \leq 2(1 + \delta_{s_1+s_2}) - 2(1 - \delta_{s_1+s_2}) = 4\delta_{s_1+s_2}.$$

Ostatecznie

$$|\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle| = |\langle \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle| \leq \delta_{s_1+s_2}.$$

Niech teraz  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{H}^n$  będą dowolnymi wektorami spełniającymi założenia. Wówczas

$$\delta_{s_1+s_2} \geq \left| \left\langle \mathbf{A} \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|_2}, \mathbf{A} \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|_2} \right\rangle \right| = \frac{|\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \rangle|}{\|\mathbf{x}_1\|_2 \cdot \|\mathbf{x}_2\|_2},$$

co kończy dowód.  $\square$

W pracach [4, 15] został przedstawiony inny dowód powyższego lematu, który korzysta z własności norm operatorowych.

Jak wspomnieliśmy na wstępie tej sekcji, do tej pory w literaturze nie pojawiły się prace, w których by wykazano, że istnieją macierze o elementach kwaternionowych, które mają własność ograniczonej izometrii. Można jednak łatwo pokazać, że podzbiorem takich macierzy jest zbiór macierzy o elementach rzeczywistych, które mają RIP dla wektorów rzeczywistych, o czym mówi poniższy lemat, przytoczony za [3].

LEMAT 4.6. *Jeśli macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  spełnia warunek  $s$ -ograniczonej izometrii dla wektorów o współrzędnych rzeczywistych z pewną stałą  $\delta_s \geq 0$ , tzn.*

$$(4.5) \quad (1 - \delta_s) \|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Az}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{z}\|_2^2$$

*dla wszystkich  $s$ -rzadkich wektorów  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , to spełnia warunek  $s$ -ograniczonej izometrii dla wektorów o współrzędnych kwaternionowych z tą samą stałą  $\delta_s$ , tzn.*

$$(1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2$$

*dla wszystkich  $s$ -rzadkich wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ .*

DOWÓD. Niech  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  będzie dowolnym  $s$ -rzadkim wektorem. Zapiszmy go w postaci

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_i \mathbf{i} + \mathbf{x}_j \mathbf{j} + \mathbf{x}_k \mathbf{k},$$

gdzie  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$  dla  $i \in \{\mathbf{r}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . Każdy z wektorów  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$  jest  $s$ -rzadki, a ponadto

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}_r + (\mathbf{Ax}_i) \mathbf{i} + (\mathbf{Ax}_j) \mathbf{j} + (\mathbf{Ax}_k) \mathbf{k}$$

i  $\mathbf{Ax}_i \in \mathbb{R}^n$  dla  $i \in \{\mathbf{r}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . Stąd

$$\|\mathbf{Ax}\|_2^2 = \|\mathbf{Ax}_r\|_2^2 + \|\mathbf{Ax}_i\|_2^2 + \|\mathbf{Ax}_j\|_2^2 + \|\mathbf{Ax}_k\|_2^2$$

i oczywiście

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}_r\|_2^2 + \|\mathbf{x}_i\|_2^2 + \|\mathbf{x}_j\|_2^2 + \|\mathbf{x}_k\|_2^2.$$

Stosując nierówność (4.5) oddzielnie do każdego z wektorów  $\mathbf{x}_i$  otrzymujemy tezę.  $\square$

Dzięki Lematowi 4.6 widzimy, że jeśli macierz pomiarowa o elementach rzeczywistych ma własność ograniczonej izometrii dla wektorów o współrzędnych rzeczywistych, to możemy jej z powodzeniem używać w zastosowaniach teorii oszczędnego próbkowania dla wektorów (sygnałów) kwaternionowych. W literaturze znane są pewne klasy macierzy rzeczywistych i zespolonych mających tę własność, np. rzeczywiste losowe macierze gausowskie czy też częściowa macierz dyskretnej transformacji Fouriera. Szczegółowe rozważania na temat macierzy pomiarowych zaprezentowane zostaną w dalszej części tej sekcji.

**4.2. Stabilna rekonstrukcja z danych zaszumionych i dokładnych.** Własności macierzy mających RIP pozwalają na udowodnienie podstawowego twierdzenia w teorii oszczędnego próbkowania w algebrze kwaternionów, tzn. dla macierzy pomiarowych i sygnałów o współrzędnych kwaternionowych. Przedstawione rozumowanie zostało zainspirowane dowodem dla macierzy i sygnałów rzeczywistych zaprezentowanym przez E. Candès'a w [22]. W artykule [3] można znaleźć analogiczny dowód dla przypadku szczególnego dla macierzy o elementach rzeczywistych (Twierdzenie 3.4 w Sekcji 3). Ponieważ Twierdzenie 4.2 zostało przedstawione (wraz z dowodem) w pracy [15] oraz artykule [4], ominiemy tutaj pewne szczegóły techniczne dowodu.

Zajmujemy się wspomnianym już wcześniej przypadkiem ogólnym, tzn.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad \text{gdzie } \mathbf{x} \in \mathbb{H}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^m \text{ oraz } \mathbf{e} \in \mathbb{H}^m, \|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta,$$

dla pewnych  $m \leq n$  i  $\eta \geq 0$ . Przez  $\mathbf{x}_{|s}$  będziemy oznaczać najlepsze  $s$ -rzadkie przybliżenie wektora  $\mathbf{x}$ , tzn. wektor powstały z wektora  $\mathbf{x}$  przez pozostawienie  $s$  największych (co do normy kwaternionowej) współrzędnych oraz zastąpienie pozostałych współrzędnych zerami. W ogólności nie zakładamy, że sygnał, który rekonstruujemy, jest rzadki.

**TWIERDZENIE 4.7.** *Niech macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  ma własność  $2s$ -ograniczonej izometrii ze stałą  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$  i niech  $\eta \geq 0$ . Wówczas dla dowolnego  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  oraz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}$  takich, że  $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta$ , rozwiązanie  $\mathbf{x}^\#$  problemu*

$$(4.6) \quad \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{H}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$$

spełnia nierówność

$$(4.7) \quad \|\mathbf{x}^\# - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{|s}\|_1 + C_1 \eta,$$

$$(4.8) \quad \|\mathbf{x}^\# - \mathbf{x}\|_1 \leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{|s}\|_1 + C_1 \sqrt{s} \cdot \eta$$

ze stałymi

$$C_0 = 2 \cdot \frac{1 + (\sqrt{2} - 1) \delta_{2s}}{1 - (\sqrt{2} + 1) \delta_{2s}}, \quad C_1 = \frac{4\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - (1 + \sqrt{2}) \delta_{2s}}.$$

**DOWÓD.** Skorzystamy z poniższej notacji. Dla dowolnego  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{H}^n$  i zbioru indeksów  $T \subseteq \{1, \dots, n\}$ , niech  $\mathbf{h}_T \in \mathbb{H}^n$  oznacza wektor taki, że

$$(\mathbf{h}_T)_i = \begin{cases} h_i & \text{jeśli } i \in T, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Symbolem  $T^c = \{1, \dots, n\} \setminus T$  będziemy oznaczać dopełnienie zbioru  $T \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

Niech  $\mathbf{h} := \mathbf{x}^\# - \mathbf{x}$  i rozłóżmy wektor  $\mathbf{h}$  na sumę wektorów  $\mathbf{h}_{T_0}, \mathbf{h}_{T_1}, \mathbf{h}_{T_2}, \dots$  o rozłącznych nośnikach w następujący sposób: niech  $T_0$  będzie zbiorem indeksów  $s$  największych (co do normy kwaternionowej) współrzędnych wektora  $\mathbf{x}$ ,  $T_1$  będzie zbiorem indeksów  $s$  największych (co do normy kwaternionowej) współrzędnych wektora  $\mathbf{h}_{T_0^c}$ ,  $T_2$  będzie zbiorem indeksów  $s$  największych współrzędnych wektora  $\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}$ , itd.

W dowodzie nierówności (4.7) skorzystamy z oczywistej nierówności

$$\|\mathbf{h}\|_2 \leq \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 + \|\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2$$

i pokażemy, że zachodzą dwa poniższe oszacowania

$$(4.9) \quad \|\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 \leq \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 + 2e \leq \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 + 2e,$$

$$(4.10) \quad \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq \frac{1}{1 - \beta} (\alpha \cdot \eta + 2\beta \cdot e),$$

gdzie  $e = \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1$  oraz

$$\alpha = \frac{2\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - \delta_{2s}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2\delta_{2s}}}{1 - \delta_{2s}},$$

o ile spełniona będzie nierówność  $\beta < 1$ , co jest równoważne z założeniem  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ . Przyjmując  $C_0 = \frac{4\beta}{1-\beta} + 2$  oraz  $C_1 = \frac{2\alpha}{1-\beta}$  otrzymamy tezę twierdzenia.

Zacznijmy od wykazania nierówności (4.9). Zauważmy, że dla  $j \geq 2$  zachodzi

$$\|\mathbf{h}_{T_j}\|_2^2 \leq \sum_{i \in T_j} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty^2 \leq s \|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty^2 \leq s \left( \frac{1}{s} \|\mathbf{h}_{T_{j-1}}\|_1 \right)^2,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że wszystkie niezerowe współrzędne  $\mathbf{h}_{T_{j-1}}$  mają normy nie mniejsze niż normy wszystkich niezerowych współrzędnych  $\mathbf{h}_{T_j}$ . Zatem dla  $j \geq 2$  mamy  $\|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_{j-1}}\|_1$ , a stąd

$$(4.11) \quad \sum_{j \geq 2} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} (\|\mathbf{h}_{T_1}\|_1 + \|\mathbf{h}_{T_2}\|_1 + \dots) \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1$$

i ostatecznie z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$(4.12) \quad \|\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 = \left\| \sum_{j \geq 2} \mathbf{h}_{T_j} \right\|_2 \leq \sum_{j \geq 2} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1.$$

Pokażemy teraz, że  $\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1$  nie może być duża. Rzeczywiście, ponieważ  $\|\mathbf{x} + \mathbf{h}\|_1 = \|\mathbf{x}^\#\|_1$  jest minimalna, zachodzi

$$\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x} + \mathbf{h}\|_1 = \|\mathbf{x}_{T_0} + \mathbf{h}_{T_0}\|_1 + \|\mathbf{x}_{T_0^c} + \mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \geq \|\mathbf{x}_{T_0}\|_1 - \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 - \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1 + \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1,$$

co prowadzi do

$$(4.13) \quad \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1.$$

Z oszacowań (4.12) i (4.13) dostajemy

$$\|\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 + \frac{2}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1.$$

Zauważmy, że z definicji  $\|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1$ , a z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy  $\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2$  i oznaczając  $e = \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1$ , dostajemy oszacowanie (4.9).

Zajmiemy się teraz oszacowaniem (4.10). Zauważmy, że

$$\mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1} = \mathbf{A} \left( \mathbf{h} - \sum_{j \geq 2} \mathbf{h}_{T_j} \right) = \mathbf{A}\mathbf{h} - \sum_{j \geq 2} \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_j}$$

i stąd, korzystając z własności funkcji  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , otrzymujemy

$$\|\mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 = \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \mathbf{A}\mathbf{h} \rangle - \sum_{j \geq 2} \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_j} \rangle$$

$$(4.14) \quad = \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \mathbf{A}\mathbf{h} \rangle - \sum_{j \geq 2} \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0}, \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_j} \rangle - \sum_{j \geq 2} \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_1}, \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_j} \rangle.$$

Zauważmy, że ponieważ  $\mathbf{x}^\#$  jest rozwiązaniem problemu (4.6), a  $\mathbf{x}$  jest wektorem dopuszczalnym dla tego problemu, zatem z nierówności trójkąta wynika, że

$$(4.15) \quad \|\mathbf{A}\mathbf{h}\|_2 = \|\mathbf{A}(\mathbf{x}^\# - \mathbf{x})\|_2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}^\# - \mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq 2\eta.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza, nierówności (4.15) oraz z własności ograniczonej izometrii wynika wówczas, że

$$(4.16) \quad |\langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \mathbf{A}\mathbf{h} \rangle| \leq \|\mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}\mathbf{h}\|_2 \leq \sqrt{1 + \delta_{2s}} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \cdot 2\eta,$$

a z Lematu 4.5 dostajemy, że

$$(4.17) \quad \left| \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_i}, \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_j} \rangle \right| \leq \delta_{2s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_i}\|_2 \cdot \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2, \quad \text{dla } i = 0, 1, j \geq 2,$$

Ponadto, ponieważ  $T_0$  i  $T_1$  są zbiorami rozłącznymi, mamy

$$(4.18) \quad \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 + \|\mathbf{h}_{T_1}\|_2 \leq \sqrt{2}\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2,$$

co wynika z faktu, że  $\|\mathbf{h}_{T_0}\|_2^2 + \|\mathbf{h}_{T_1}\|_2^2 = \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2^2$ .

Stąd, kolejno, z własności ograniczonej izometrii, (4.14) i nierówności trójkąta, oszacowań (4.16)–(4.17), (4.18) i (4.11), otrzymamy

$$\begin{aligned} (1 - \delta_{2s})\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 &\leq \|\mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 \\ &\leq |\langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \mathbf{A}\mathbf{h} \rangle| + \sum_{j \geq 2} \left| \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_0}, \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_j} \rangle \right| + \sum_{j \geq 2} \left| \langle \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_1}, \mathbf{A}\mathbf{h}_{T_j} \rangle \right| \\ &\leq 2\sqrt{1 + \delta_{2s}} \cdot \eta \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 + \delta_{2s} \cdot (\|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 + \|\mathbf{h}_{T_1}\|_2) \cdot \sum_{j \geq 2} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \\ &\leq \left( 2\sqrt{1 + \delta_{2s}} \cdot \eta + \sqrt{2}\delta_{2s} \cdot \sum_{j \geq 2} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \right) \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \\ &\leq \left( 2\sqrt{1 + \delta_{2s}} \cdot \eta + \frac{\sqrt{2}\delta_{2s}}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \right) \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2. \end{aligned}$$

Możemy zatem, uwzględniając nierówność (4.13), zapisać

$$(4.19) \quad \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq \frac{2\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - \delta_{2s}} \cdot \eta + \frac{\sqrt{2}\delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} \cdot \frac{\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{s}} \leq \alpha \cdot \eta + \beta \cdot \frac{\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1}{\sqrt{s}} + 2\beta \cdot e,$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $e$  zostały zdefiniowane na początku dowodu. Ponieważ zachodzi również  $\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2$ , to

$$\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq \alpha \cdot \eta + \beta \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 + 2\beta \cdot e.$$

Zatem

$$\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq \frac{1}{1 - \beta}(\alpha \cdot \eta + 2\beta \cdot e),$$

o ile  $\beta < 1$ , co kończy dowód oszacowania (4.10) i daje nierówność (4.7).

Aby wykazać nierówność (4.8) przypomnijmy, że  $\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2$  i łącząc ten wynik z nierównością (4.19) otrzymujemy

$$(4.20) \quad \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 \leq \alpha \cdot \sqrt{s} \cdot \eta + \beta \cdot \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1.$$

Korzystając z powyższej nierówności oraz z (4.13) otrzymujemy

$$\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \alpha \cdot \sqrt{s} \cdot \eta + \beta \cdot \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1$$

i stąd

$$\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \frac{\alpha}{1-\beta} \cdot \sqrt{s} \cdot \eta + \frac{2}{1-\beta} \cdot \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1.$$

Zatem wektor  $\mathbf{h} = \mathbf{x}^\# - \mathbf{x}$  spełnia, na mocy (4.20), oszacowanie

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|_1 &= \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 + \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \alpha \cdot \sqrt{s} \cdot \eta + (1 + \beta) \cdot \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \\ &\leq \frac{2\alpha}{1-\beta} \cdot \sqrt{s} \cdot \eta + 2 \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1, \end{aligned}$$

co daje nierówność (4.8), gdyż  $C_0 = 2\frac{1+\beta}{1-\beta}$  i  $C_1 = \frac{2\alpha}{1-\beta}$ , i kończy dowód twierdzenia.  $\square$

Bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 4.7 jest poniższy wniosek dotyczący rekonstrukcji wektorów kwaternionowych z dokładnych pomiarów  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  (tzn.  $\eta = 0$ ), a w szczególności wektorów  $s$ -rzadkich (tzn.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{|s}$ ).

**WNIOSEK 4.8.** *Niech macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  ma własność  $2s$ -ograniczonej izometrii ze stałą  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ . Wówczas dla dowolnego  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  oraz dla dokładnych danych pomiarowych  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{H}^m$  rozwiązanie  $\mathbf{x}^\#$  problemu*

$$(4.21) \quad \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{H}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y},$$

*spełnia nierówności*

$$(4.22) \quad \|\mathbf{x}^\# - \mathbf{x}\|_1 \leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{|s}\|_1,$$

$$(4.23) \quad \|\mathbf{x}^\# - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{|s}\|_1$$

*ze stałą  $C_0$  jak w Twierdzeniu 4.7. W szczególności, jeśli  $\mathbf{x}$  jest wektorem  $s$ -rzadkim, to rekonstrukcja w wyniku minimalizacji  $\ell_1$  jest dokładna.*

Oszacowanie  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$  nie jest optymalne. W literaturze można znaleźć lepsze oszacowania dla macierzy o elementach rzeczywistych i dla własności ograniczonej izometrii dla wektorów rzeczywistych (np.  $\delta_{2s} < \frac{2}{7} (3 - \sqrt{2}) \approx 0,4531$  w [52],  $\delta_{2s} < \frac{4}{\sqrt{41}} \approx 0,6246$  w [53]). Znane są jednak przykłady  $s$ -rzadkich wektorów o współczynnikach rzeczywistych, których nie można jednoznacznie zrekonstruować w wyniku minimalizacji  $\ell_1$  dla  $\delta_s > \frac{1}{3}$  [21] lub  $\delta_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon \approx 0,7071 + \varepsilon$  dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  [34], co daje nam również górne oszacowanie dla przypadku kwaternionowego.

**4.3. Kwaternionowe gaussowskie macierze losowe.** Wiemy już, że jeśli macierz pomiarowa  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  ma własność ograniczonej izometrii z odpowiednio małą stałą, to możliwa jest stabilna rekonstrukcja dowolnych wektorów z danych pomiarowych obarczonych pewnym błędem. Wiemy także, że istnieją macierze o elementach rzeczywistych lub zespolonych, które mają własność ograniczonej izometrii, np. losowa rzeczywista macierz gaussowska [7, 27]. Pierwszy (i zgodnie z naszą wiedzą jedyny) dowód, że również losowe macierze gaussowskie o elementach zespolonych mają tę własność, został opublikowany w 2013 roku w artykule [101]. Niedawno pojawił się również cykl prac, których autorzy, posługując się elementarnymi narzędziami probabilistycznymi, twierdzą, że wykazali własność ograniczonej izometrii dla gaussowskich macierzy losowych zarówno w przypadku rzeczywistym jak i zespolonym [67–69]. Są to jednak dowody niepełne, korzystające z założeń, które nigdy nie będą spełnione. Szczegółowe rozważania na ten temat ukazały się w pracy [15].

Przeprowadzając zupełnie inne rozumowanie niż we wspomnianych artykułach wykazemy, że również kwaternionowe losowe macierze gaussowskie mają własność ograniczonej izometrii. Do tej pory dowód taki nie pojawił się w literaturze. Można znaleźć jedynie wyniki symulacji numerycznych z wykorzystaniem kwaternionowych losowych macierzy gaussowskich [8, 62, 100]. W artykule [5] przedstawiamy analogiczny dowód z innymi stałymi. Dowody pewnych faktów z teorii prawdopodobieństwa, które nie są bezpośrednio związane z tematem tej sekcji, przeniesiemy do Dodatku A.

W dalszej części rozdziału przyjmujemy standardowe oznaczenia na rozkłady (rzeczywistych) zmiennych losowych  $X$ , tak jak w [66]:

- (a)  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , jeśli  $X$  ma rozkład *normalny* (*Gaussa*) o wartości oczekiwanej  $\mu$  i wariancji  $\sigma^2$ , tzn. rozkład o gęstości

$$\phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

- (b)  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ , jeśli  $X$  ma rozkład *gamma* o wartości oczekiwanej  $\frac{\alpha}{\beta}$  i wariancji  $\frac{\alpha}{\beta^2}$ , tzn. rozkład o gęstości

$$\gamma_{\alpha, \beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}_+,$$

a ponadto funkcja generująca momenty ma postać  $(1 - \frac{t}{\beta})^{-\alpha}$  dla  $t < \beta$ ,

- (c)  $X \sim \chi^2(m)$ , jeśli  $X$  ma rozkład  $\chi^2$  o  $m$  stopniach swobody, tzn. jest sumą kwadratów  $m$  niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $\mathcal{N}(0, 1)$ ; ponadto  $\chi^2(m) = \Gamma(\frac{m}{2}, \frac{1}{2})$ .

Przyjmujemy również standardowe oznaczenie  $\mathbb{E}X$  wartości oczekiwanej zmiennej losowej  $X$ ,  $\text{Var} X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$  wariancji  $X$  i  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$  kowariancji zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ . Wprowadzimy również pojęcie podwykładniczej zmiennej losowej, zgodnie z poniższą definicją [99].



DEFINICJA 4.9. Zmienną losową  $X$  nazywamy *podwykładniczą* (ang. *sub-exponential*), jeśli istnieją  $\sigma^2 > 0$  oraz  $\delta > 0$  takie, że

$$(4.24) \quad \mathbb{E} \left( e^{t(X - \mathbb{E}X)} \right) \leq \exp \left( \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \quad \text{dla } |t| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Piszemy wówczas  $X \sim \text{SubExp}(\sigma^2, \delta)$ .

Zauważmy, że warunek (4.24) można zapisać także za pomocą funkcji generującej momenty  $M(t) = \mathbb{E} e^{tX}$ , tzn.

$$M(t) \leq \exp \left( \nu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \quad \text{dla } |t| \leq \frac{1}{\delta},$$

gdzie  $\nu = \mathbb{E}X$ . W niektórych źródłach zmienne losowe, dla których spełnione jest powyższe oszacowanie dla pewnych  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$  oraz  $\delta > 0$ , nazywane są zmiennymi *lokalnie podgaussowskimi* (ang. *locally sub-Gaussian*) [30]. Szczegółowe rozważania na temat zmiennych podwykładniczych zamieszczone są w Dodatku A.

Rozważamy także wielowymiarowe zmienne losowe, tzn. *wektory losowe*. W szczególności będziemy używać uogólnienia rozkładu normalnego na przypadek wielowymiarowy. Mówimy, że (rzeczywisty) wektor losowy  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  ma *wielowymiarowy rozkład normalny*, jeśli istnieje wektor  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  i macierz odwracalna  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  taka, że  $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$ , gdzie  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$  jest wektorem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Równoważnie wektor losowy ma wielowymiarowy rozkład normalny, jeśli dowolna kombinacja liniowa jego współrzędnych ma (jednowymiarowy) rozkład normalny.

Przytoczone wyżej definicje, w tym rozkładu wielowymiarowego, posłużą do zdefiniowania kwaternionowych zmiennych i wektorów losowych [72, 97].

DEFINICJA 4.10. Zmienną losową  $X$  nazywamy *kwaternionową zmienną losową*, jeśli

$$X = X_0 + X_1 \mathbf{i} + X_2 \mathbf{j} + X_3 \mathbf{k}$$

i  $X_0, \dots, X_3$  są rzeczywistymi zmiennymi losowymi.

W dalszej części pracy będziemy zajmować się kwaternionowymi zmiennymi losowymi  $X$  takimi, że  $X_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{4})$  i  $X_i$  są parami niezależne. Takie zmienne losowe będziemy na potrzeby tej pracy nazywać *kwaternionowymi normalnymi (gaussowskimi) zmiennymi losowymi* o wariancji  $\sigma^2$  i oznaczać  $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, \sigma^2)$ . Analogicznie wprowadzamy definicję *kwaternionowych losowych macierzy gaussowskich*, tzn. macierzy  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{H}^{m \times n}$  takich, że  $a_{ij}$  są parami niezależnymi kwaternionowymi zmiennymi losowymi takimi, że  $a_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, \sigma^2)$ . Pokażemy, że macierze te mają własność ograniczonej izometrii.

Przypomnijmy, że macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  ma własność  $s$ -ograniczonej izometrii ze stałą  $\delta_s \geq 0$ , jeśli

$$(1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2$$

dla wszystkich  $s$ -rzadkich wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ . Bez utraty ogólności możemy rozważać jedynie wektory  $\mathbf{x}$  jednostkowe i wówczas

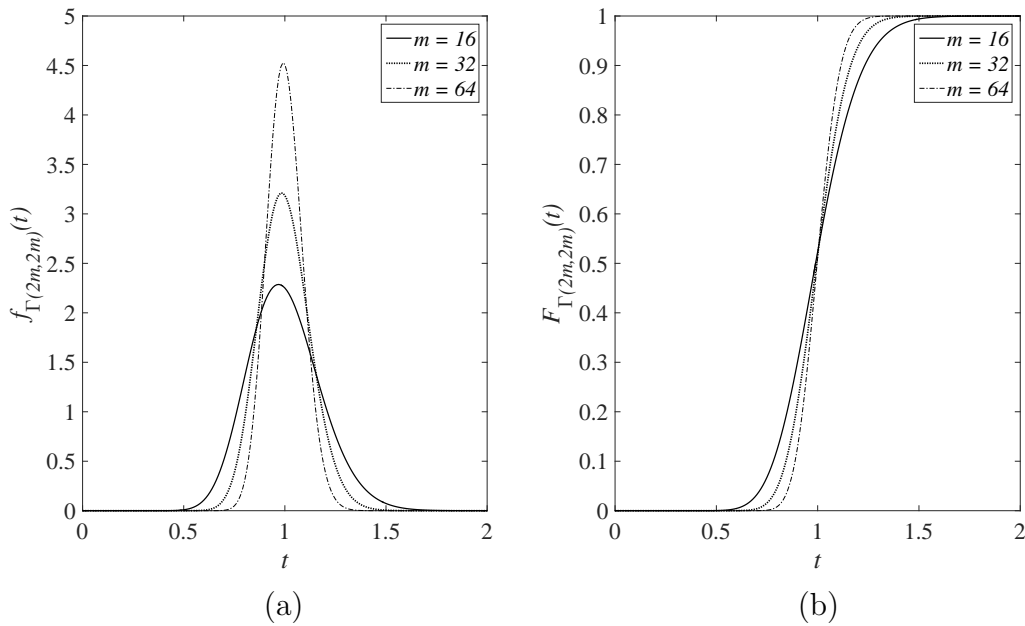
$$1 - \delta_s \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq 1 + \delta_s.$$

Zauważmy, że ponieważ  $\mathbf{A}$  jest macierzą losową, to stała  $\delta_s$  również jest (rzeczywistą) zmienną losową. Zanim przejdziemy do dowodu głównego twierdzenia, sformułujmy poniższy lemat, który charakteryzuje rozkład zmiennej losowej  $\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax}\|_2^2$ . Dowód lematu został opisany w [15].

**LEMAT 4.11.** *Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  będzie kwaternionową losową macierzą gaussowską, której elementy  $a_{ij}$  są niezależnymi kwaternionowymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, \frac{1}{m})$  (tzn. część rzeczywista i wszystkie współczynniki części urojonej każdej takiej zmiennej  $a_{ij}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{4m})$ ) i niech  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  będzie taki, że  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ . Wówczas zmienna losowa*

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax}\|_2^2$$

ma rozkład  $\Gamma(2m, 2m)$  i nie zależy on od  $\mathbf{x}$ . W szczególności  $\mathbb{E} \mathcal{R} = 1$  oraz  $\text{Var} \mathcal{R} = \frac{1}{2m}$ .



RYSUNEK 4.1. Gęstość (a) i dystrybuanta (b) rozkładu  $\Gamma(2m, 2m)$  dla różnych wartości  $m$ .

Kluczowa w powyższym lemacie jest informacja, że rozkład zmiennej losowej  $\mathcal{R}$  (przedstawiony na Rys. 4.1) nie zależy od wektora  $\mathbf{x}$ , w szczególności od wyboru  $s$ -elementowego nośnika wektora. Lemat ten został udowodniony również w pracach [67–69] w wersji dla macierzy o elementach rzeczywistych i zespolonych. Warto zauważyć, że w przypadku macierzy rzeczywistych zmienna  $\mathcal{R}$  ma rozkład  $\Gamma(\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$ , a dla macierzy zespolonych rozkład  $\Gamma(m, m)$ . W przypadku macierzy kwaternionowych otrzymujemy więc mniejszą wariancję zmiennej losowej  $\mathcal{R}$  niż dla macierzy rzeczywistych, tj.  $\frac{2}{m}$ , czy zespolonych, tj.  $\frac{1}{m}$ .

**WNIOSEK 4.12.** *Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  będzie kwaternionową losową macierzą gaussowską, tak jak w Lemacie 4.11 i  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  będzie taki, że  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ . Wówczas*

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \sim \text{SubExp}\left(\frac{2}{m}, \frac{1}{m}\right).$$

**DOWÓD.** Jest to bezpośredni wniosek z ogólniejszego Twierdzenia A.2, które mówi, że zmienna losowa o rozkładzie  $\Gamma(\alpha, \beta)$  jest zmienną podwykładniczą z parametrami  $\sigma^2 = \frac{4\alpha}{\beta^2}$  oraz  $\delta = \frac{2}{\beta}$ .  $\square$

Powyższy fakt pozwoli nam skorzystać z oszacowania na „ogony” (ang. *tail bounds*) zmiennych podwykładniczych, tzn. z Twierdzenia A.5. Poniższe twierdzenie jest jego bezpośrednim wnioskiem.

**WNIOSEK 4.13.** *Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  będzie kwaternionową losową macierzą gaussowską, tak jak w Lemacie 4.11 i  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  będzie taki, że  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ . Wówczas*

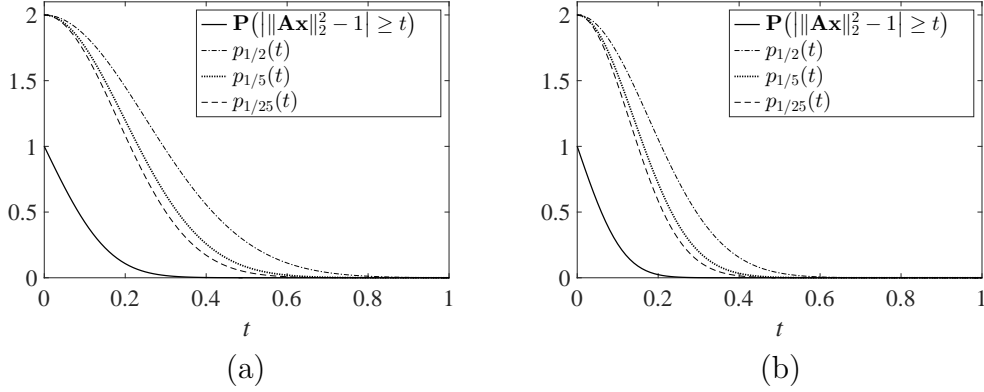
$$(4.25) \quad \mathbb{P}\left(\left|\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 - 1\right| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2 m}{4}\right) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq 2.$$

Podobnie jak w przypadku rozkładów zmiennej losowej  $\mathcal{R}$  warto porównać otrzymany wynik z analogicznym twierdzeniem dla macierzy rzeczywistych oraz zespolonych. W przypadku macierzy o elementach rzeczywistych w wykładniku po prawej stronie nierówności (4.25) mamy  $-\frac{t^2 m}{16}$ , co jest wynikiem gorszym.

Należy mieć również na uwadze fakt, że nie jest to oszacowanie optymalne, co widać na Rys. 4.2. Modyfikując dowód Twierdzenia A.2 można pokazać, że rozkład  $\Gamma(\alpha, \beta)$  jest rozkładem podwykładniczym z parametrami  $\sigma^2 = \frac{2}{1-\gamma} \frac{\alpha}{\beta^2}$  i  $\delta = \frac{1}{\gamma\beta}$  dla dowolnego  $0 < \gamma < 1$  (Wniosek A.3). Można wówczas zastąpić (4.25) nierównością

$$(4.26) \quad \mathbb{P}\left(\left|\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 - 1\right| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2(1-\gamma)m}{2}\right) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{2\gamma}{1-\gamma}.$$

Biorąc  $\gamma < \frac{1}{2}$  możemy zatem uzyskać „lepszy” (tzn. mniejszy) parametr  $\sigma^2$  niż w podanym przypadku, a zatem lepsze oszacowanie niż w nierówności (4.25). Odbywa się to jednak kosztem długości przedziału, na jakim to ograniczenie jest prawdziwe (tzn. zwiększa się parametr  $\delta$ ) [5]. Na potrzeby tej pracy, ze względu na przejrzystość dowodu Twierdzenia 4.15, pozostawiamy jednak nierówność w wersji przytoczonej we Wniosku 4.13, tzn. dla  $\gamma = \frac{1}{2}$ .



RYSUNEK 4.2. Sprawdzenie nieoptymalności oszacowania prawdopodobieństwa  $\mathbb{P}\left(\left|\|\mathbf{Ax}\|_2^2 - 1\right| \geq t\right)$  przez funkcję  $p_\gamma(t) = 2 \exp\left(-\frac{t^2(1-\gamma)m}{2}\right)$  prawej strony oszacowania (4.26) dla różnych  $\gamma$  oraz (a)  $m = 32$ , (b)  $m = 64$ .

Zanim przejdziemy do dowodu własności ograniczonej izometrii dla kwaternionowych losowych macierzy gaussowskich, wykażemy najpierw pomocniczy lemat.

LEMAT 4.14. Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  będzie kwaternionową losową macierzą gaussowską, której elementy  $a_{ij}$  są niezależnymi kwaternionowymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, \frac{1}{m})$  (tzn. część rzeczywista i wszystkie współczynniki części urojonej każdej takiej zmiennej  $a_{ij}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{4m})$ ). Ponadto, niech  $S \subset \{1, \dots, n\}$  będzie taki, że  $\#S = s \leq n$ , niech  $\varepsilon > 0$  i  $0 < \delta \leq 1$ . Wówczas jeśli

$$m \geq \frac{16}{3} \delta^{-2} \left(14s + \ln \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

to z prawdopodobieństwem równym co najmniej  $1 - \varepsilon$  zachodzi

$$\|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2} < \delta.$$

DOWÓD. Jak już stwierdziliśmy wcześniej, wystarczy rozważać wektory  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  jednostkowe, tzn. takie, że  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ . Oznaczmy symbolem  $\Sigma_S$  zbiór tych wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ , dla których  $\text{supp } \mathbf{x} \subseteq S$ . Niech

$$\mathcal{A}_S = \{\mathbf{x} \in \Sigma_S: \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}.$$

Zauważmy, że zbiór  $\Sigma_S$  możemy utożsamiać z  $\mathbb{R}^{4s}$ , a zbiór  $\mathcal{A}_S$  ze sferą jednostkową w  $\mathbb{R}^{4s}$ .

Ustalmy  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ . Niech  $\mathcal{A}_\gamma$  będzie  $\gamma$ -pokryciem zbioru  $\mathcal{A}_S$  w przestrzeni  $\Sigma_S$ , tzn. najmniej licznym zbiorem  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T\} \subset \Sigma_S$  takim, że

$$\mathcal{A}_S \subseteq \bigcup_{\ell=1}^T B(\mathbf{y}_\ell, \gamma),$$

gdzie  $B(\mathbf{y}_\ell, \gamma) = \{\mathbf{y} \in \Sigma_S: \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_\ell\| \leq \gamma\}$ . Ponieważ zbiór  $\mathcal{A}_S$  jest wypukły, zachodzi  $\|\mathbf{y}_\ell\|_2 \leq 1$  dla  $\ell = 1, \dots, T$ .

Z własności  $\gamma$ -pokrycia (zob. [53, Proposition C.3]) widzimy, że

$$(4.27) \quad \#\mathcal{A}_\gamma \leq \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^{4s}$$

i dla każdego wektora  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_S$  istnieje wektor  $\mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma$  taki, że  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \gamma$ .

Zauważmy, że dla  $0 \leq \tilde{\delta} \leq 2$  zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\exists \mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma \left| \|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{y}\|_2^2 \right| \geq \tilde{\delta} \|\mathbf{y}\|_2^2\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma} \left\{ \left| \|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{y}\|_2^2 \right| \geq \tilde{\delta} \|\mathbf{y}\|_2^2 \right\}\right) \\ &\leq \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma} \mathbb{P}\left(\left| \|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{y}\|_2^2 \right| \geq \tilde{\delta} \|\mathbf{y}\|_2^2\right) \leq \#\mathcal{A}_\gamma \cdot 2 \exp\left(-\frac{\tilde{\delta}^2 m}{4}\right) \\ &\leq 2 \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^{4s} \exp\left(-\frac{\tilde{\delta}^2 m}{4}\right), \end{aligned}$$

co wynika z podaddytywności prawdopodobieństwa, Wniosku 4.13 i oszacowania (4.27). Stąd oczywiście

$$\mathbb{P}\left(\forall \mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma \left| \|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{y}\|_2^2 \right| < \tilde{\delta} \|\mathbf{y}\|_2^2\right) \geq 1 - 2 \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^{4s} \exp\left(-\frac{\tilde{\delta}^2 m}{4}\right).$$

Weźmy macierz, dla której zachodzi warunek

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma \quad \left| \|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{y}\|_2^2 \right| < \tilde{\delta} \|\mathbf{y}\|_2^2$$

i zauważmy, że własność ta jest równoważna następującej

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma \quad \left| \|\mathbf{A}_S \mathbf{y}_S\|_2^2 - \|\mathbf{y}_S\|_2^2 \right| < \tilde{\delta} \|\mathbf{y}_S\|_2^2,$$

gdzie  $\mathbf{A}_S$  oznacza macierz powstałą z kolumn macierzy  $\mathbf{A}$  o indeksach w zbiorze  $S$ . Oczywiście ponieważ  $\text{supp } \mathbf{y} \subset S$ , to zachodzi  $\|\mathbf{y}_S\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2$ . Ponadto

$$\left| \|\mathbf{A}_S \mathbf{y}_S\|_2^2 - \|\mathbf{y}_S\|_2^2 \right| = |\langle (\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}) \mathbf{y}_S, \mathbf{y}_S \rangle|.$$

Oznaczmy  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}$ .

Niech teraz  $\mathbf{x}$  będzie dowolnym wektorem ze zbioru  $\mathcal{A}_S$ , a  $\mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma$  będzie taki, że  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}_S - \mathbf{y}_S\|_2 \leq \gamma$ . Wówczas

$$\langle \mathbf{B} \mathbf{x}_S, \mathbf{x}_S \rangle = \langle \mathbf{B} \mathbf{y}_S, \mathbf{y}_S \rangle + \langle \mathbf{B} \mathbf{x}_S, \mathbf{x}_S - \mathbf{y}_S \rangle + \langle \mathbf{B} (\mathbf{x}_S - \mathbf{y}_S), \mathbf{y}_S \rangle$$

a stąd

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{B} \mathbf{x}_S, \mathbf{x}_S \rangle| &\leq |\langle \mathbf{B} \mathbf{y}_S, \mathbf{y}_S \rangle| + \|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2} \|\mathbf{x}_S\|_2 \|\mathbf{x}_S - \mathbf{y}_S\|_2 + \|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2} \|\mathbf{x}_S - \mathbf{y}_S\|_2 \|\mathbf{y}_S\|_2 \\ &< \tilde{\delta} \|\mathbf{y}_S\|_2 + \|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2} \|\mathbf{x}_S - \mathbf{y}_S\|_2 (\|\mathbf{x}_S\|_2 + \|\mathbf{y}_S\|_2) \leq \tilde{\delta} + 2\gamma \|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2}. \end{aligned}$$

Biorąc supremum po wszystkich  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_S$  i korzystając z założenia  $\gamma < \frac{1}{2}$  otrzymamy

$$\|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2} < \tilde{\delta} + 2\gamma \|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{B}\|_{2 \rightarrow 2} < \frac{\tilde{\delta}}{1 - 2\gamma}.$$

Z powyższych rozważań wynika, że

$$\mathbb{P}\left(\|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2} < \frac{\tilde{\delta}}{1 - 2\gamma}\right) \geq \mathbb{P}\left(\forall \mathbf{y} \in \mathcal{A}_\gamma \quad \left| \|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{y}\|_2^2 \right| < \tilde{\delta} \|\mathbf{y}\|_2^2\right)$$

i biorąc  $\tilde{\delta} = (1 - 2\gamma)\delta$  dostajemy

$$\mathbb{P}\left(\|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2} < \delta\right) \geq 1 - 2 \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^{4s} \exp\left(-\frac{1}{4}(1 - 2\gamma)^2 \delta^2 m\right).$$

Wynika stąd, że jeśli

$$(4.28) \quad m \geq \frac{4}{(1 - 2\gamma)^2} \delta^{-2} \left(4s \ln\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) + \ln \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

to

$$\mathbb{P}\left(\|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2} < \delta\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Biorąc  $\gamma = \frac{2}{e^{7/2} - 1} \approx 6,228 \cdot 10^{-2}$  otrzymamy, że  $\frac{1}{(1 - 2\gamma)^2} \leq \frac{4}{3}$  i  $\ln\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) = \frac{7}{2}$ , a powyższe oszacowanie zachodzi dla  $\delta \leq \frac{2}{1 - 2\gamma} \approx 2,885$ . Zatem jeśli

$$m \geq \frac{16}{3} \delta^{-2} \left(14s + \ln \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

to zachodzi również nierówność (4.28) i otrzymujemy tezę twierdzenia.  $\square$

Zauważmy, że powyższy lemat uwzględniał jedynie wektory  $s$ -rzadkie o ustalonym nośniku  $S$  i nie brał pod uwagę kolumn macierzy  $\mathbf{A}$  o indeksach poza zbiorem  $S$ . Mając ten wynik możemy jednak w bezpośredni sposób przejść do dowodu własności ograniczonej izometrii dla kwaternionowych losowych macierzy gaussowskich.

**TWIERDZENIE 4.15.** *Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  będzie kwaternionową losową macierzą gaussowską taką jak w Lemacie 4.14. Ponadto niech  $\varepsilon > 0$  i  $0 < \delta \leq 1$ . Wówczas jeśli*

$$m \geq \frac{16}{3} \delta^{-2} \left(15s + s \ln \frac{n}{s} + \ln \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

to z prawdopodobieństwem równym co najmniej  $1 - \varepsilon$  stała  $s$ -ograniczonej izometrii  $\delta_s$  macierzy  $\mathbf{A}$  spełnia  $\delta_s < \delta$ .

**DOWÓD.** Zauważmy, że z Lematu 4.3 otrzymujemy

$$\delta_s = \max_{S: \#S=s} \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2},$$

gdzie  $S$  są podzbiórmi zbioru  $\{1, \dots, n\}$ . Wówczas, korzystając z podaddytywności prawdopodobieństwa oraz dowodu Lematu 4.14, otrzymamy, że dla  $\delta \leq \frac{2}{1 - \gamma}$  zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\delta_s \geq \delta) &= \mathbb{P}\left(\max_{S: \#S=s} \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2} \geq \delta\right) = \mathbb{P}\left(\exists S: \#S=s \quad \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2} \geq \delta\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{S: \#S=s} \left\{\|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2} \geq \delta\right\}\right) \leq \sum_{S: \#S=s} \mathbb{P}\left(\|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{Id}\|_{2 \rightarrow 2} \geq \delta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{S: \#S=s} 2 \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^{4s} \exp\left(-\frac{1}{4}(1-2\gamma)^2 \delta^2 m\right) \\
 &= 2 \binom{n}{s} \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^{4s} \exp\left(-\frac{1}{4}(1-2\gamma)^2 \delta^2 m\right) \\
 &\leq 2 \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^{4s} \exp\left(-\frac{1}{4}(1-2\gamma)^2 \delta^2 m\right),
 \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z oszacowania  $\binom{n}{s} \leq \left(\frac{en}{s}\right)^s$  dla dowolnych  $n \geq s > 0$  (zob. [53, Lemma C.5]). Zatem jeśli

$$(4.29) \quad m \geq \frac{4}{(1-2\gamma)^2} \delta^{-2} \left(4s \ln \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) + s \ln \frac{en}{s} + \ln \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

to  $\mathbb{P}(\delta_s < \delta) \geq 1 - \varepsilon$ . Niech teraz, jak w poprzednim dowodzie,  $\gamma = \frac{2}{e^{7/2}-1}$ . Ponieważ  $\frac{1}{(1-2\gamma)^2} \leq \frac{4}{3}$  oraz  $\ln \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) = \frac{7}{2}$ , to dla  $\delta \leq \frac{2}{1-2\gamma} \approx 2,885$ , jeśli

$$m \geq \frac{16}{3} \delta^{-2} \left(15s + s \ln \frac{n}{s} + \ln \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

to zachodzi również nierówność (4.29) i otrzymujemy tezę twierdzenia.  $\square$

Powyższe twierdzenie daje „receptę”, według której powinniśmy konstruować kwaternionowe losowe macierze gaussowskie, dzięki której macierze te będą miały z dużym prawdopodobieństwem własność ograniczonej izometrii. Można ten wynik sformułować również w inny sposób, który mówi, z jakim prawdopodobieństwem losowa macierz gaussowska będzie miała własność ograniczonej izometrii z zadaną stałą.

**WNIOSEK 4.16.** *Niech  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  będzie kwaternionową losową macierzą gaussowską taką jak w Lemacie 4.14. Ponadto niech  $0 < \delta \leq 1$ . Wówczas jeśli*

$$m \geq 160 \delta^{-2} s \ln \frac{en}{s},$$

*to z prawdopodobieństwem równym co najmniej  $1 - 2 \exp\left(-\frac{3}{32} \delta^2 m\right)$  stała  $s$ -ograniczonej izometrii  $\delta_s$  macierzy  $\mathbf{A}$  spełnia  $\delta_s < \delta$ .*

**DOWÓD.** Teza wynika z Twierdzenia 4.15 po podstawieniu  $\varepsilon = 2 \exp\left(-\frac{3}{32} \delta^2 m\right)$  i uporządkowaniu stałych.  $\square$

Zauważmy, że w dowodzie Lematu 4.14 skorzystaliśmy z nieoptymalnej nierówności (4.25). Lepsze oszacowanie uzyskalibyśmy korzystając z nierówności (4.26) z odpowiednio dobranym parametrem  $\gamma$ . Należy jednak pamiętać, że takie oszacowanie jest prawdziwe na krótszym przedziale, co ma swoje odzwierciedlenie również w założeniach na zakres parametru  $\delta$  w Twierdzeniu 4.15. Wielkość parametru  $\gamma$  można dobierać w zależności od wymogów stawianych w twierdzeniach o stabilnej rekonstrukcji (w przypadku Twierdzenia 4.7 dopasowując do  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ ).

## 5. Symulacje numeryczne

Ostatnią sekcję Rozdziału 1 poświęcimy wynikom eksperymentów numerycznych, które obrazują rozważania teoretyczne przedstawione w Sekcji 4.3. Sugerują one, że uzyskane oszacowania nie są optymalne i można je poprawić.

Inspiracją do przeprowadzenia tych eksperymentów był artykuł [100], który był jedną z pierwszych prób zastosowania teorii oszczędnego próbkowania do sygnałów i macierzy pomiarowych o wartościach w algebrze kwaternionów. Autorzy tego artykułu przedstawili jedynie wyniki eksperymentów i nie podali żadnych podstaw teoretycznych, które uzasadniałyby ich wyniki. Dysponując już wynikami teoretycznymi możemy znacznie rozszerzyć przedstawione tam eksperymenty.

Na początku w Sekcji 5.1 przedstawimy empiryczne rozkłady stałych ograniczonej izometrii dla losowych kwaternionowych macierzy gaussowskich. Skomentujemy również próbę porównania uzyskanych wyników z tezą Twierdzenia 4.15 i Wniosku 4.16. W Sekcji 5.2 pokażemy wyniki standardowego eksperymentu rekonstrukcji wektorów kwaternionowych za pomocą minimalizacji normy  $\ell_1$  z pomiarów za pomocą gaussowskich losowych macierzy kwaternionowych. Pozwolą one na oszacowanie stałych w Twierdzeniu 4.7 i Wniosku 4.8. Część przedstawionych w tych sekcjach wyników została również opisana w artykułach [4, 5]. Na koniec pokażemy próbę zastosowania opisywanej teorii do rekonstrukcji obrazów kolorowych, tzn. takich, których piksele można reprezentować za pomocą kwaternionów.

Eksperymenty przeprowadziliśmy w środowisku MATLAB R2016a na komputerze PC z procesorem Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU (3.60GHz) i 16GB RAM, pracującym pod systemem operacyjnym Microsoft Windows 10 Pro. Opisywane wyniki powstały we współpracy z Wydziałem Matematyki i Nauk Informacyjnych PW.

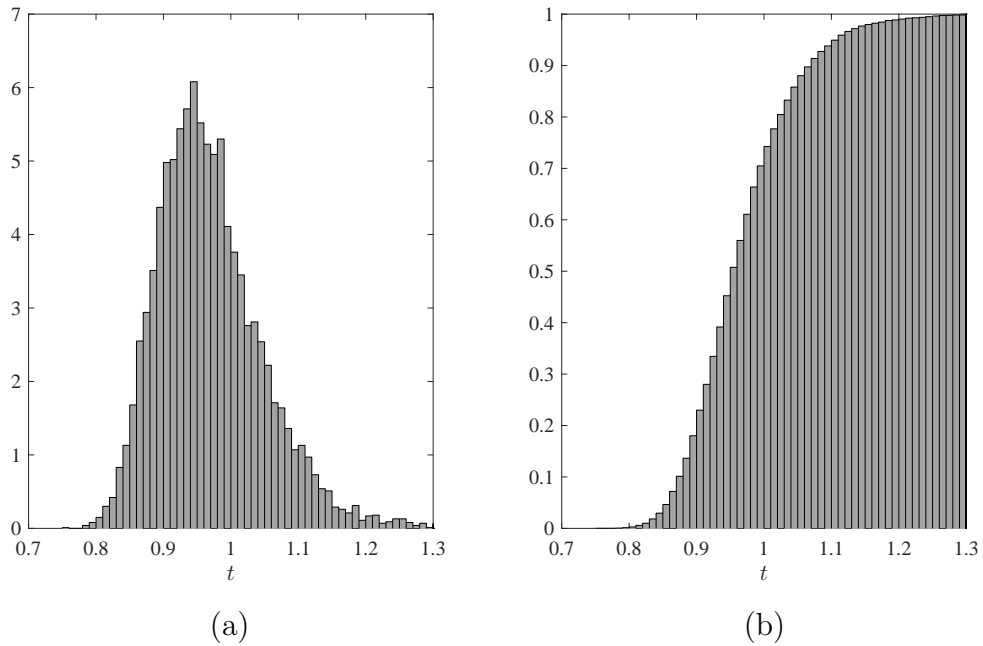
**5.1. Rozkłady empiryczne stałych ograniczonej izometrii.** Aby estymować rozkład stałej ograniczonej izometrii dla gaussowskich losowych macierzy kwaternionowych, symulację wykonaliśmy dla macierzy  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , gdzie  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  i  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ,  $m = 64$ ,  $n = 256$  oraz dla  $s$ -rzadkich wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  takich, że  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ , gdzie  $s = \frac{m}{2} = 32$ .

Przypomnijmy, że stałą  $s$ -ograniczonej izometrii można zapisać jako

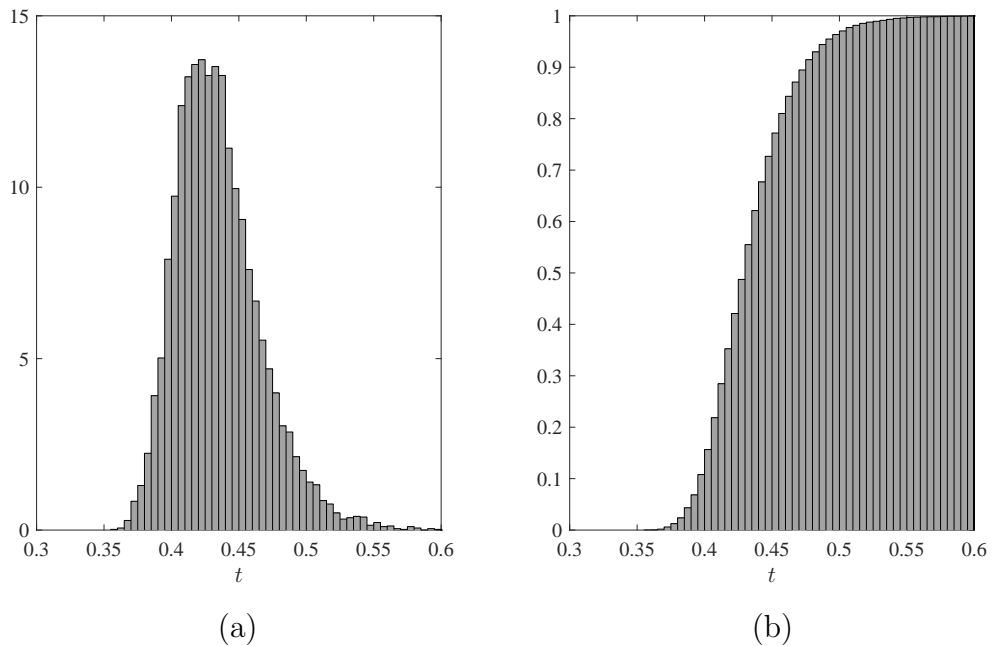
$$\delta_s = \max_{\mathbf{x} \in \Sigma_s} \left| \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 - 1 \right|,$$

gdzie  $\Sigma_s$  jest zbiorem wszystkich  $s$ -rzadkich wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  takich, że  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ . Wyznaczając dystrybuantę empiryczną zmiennej losowej  $\delta_s$  dla danej realizacji zmiennej losowej  $\mathbf{A}$  wylosowaliśmy  $10^5$   $s$ -rzadkich wektorów o normie  $\ell_2$  równej 1 i wzięliśmy maksimum po uzyskanym  $10^5$ -elementowym zbiorze. Próba losowa składała się z  $10^4$  realizacji zmiennej losowej  $\mathbf{A}$ . Wyniki symulacji dla macierzy i wektorów o współrzędnych rzeczywistych zamieszczone są na Rys. 5.3, a dla przypadku kwaternionowego na Rys. 5.4.





RYSUNEK 5.3. Rozkład empiryczny zmiennej losowej  $\delta_s$  dla gaussowskich macierzy losowych  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $n = 256$ ,  $m = 64$ ,  $s = 32$ . (a) Gęstość empiryczna rozkładu. (b) Dystrybuanta empiryczna rozkładu.



RYSUNEK 5.4. Rozkład empiryczny zmiennej losowej  $\delta_s$  dla gaussowskich macierzy losowych  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ ,  $n = 256$ ,  $m = 64$ ,  $s = 32$ . (a) Gęstość empiryczna rozkładu. (b) Dystrybuanta empiryczna rozkładu.

Uzyskane wyniki potwierdzają rozważania teoretyczne mówiące, że kwaternionowe losowe macierze gaussowskie mają z dużym prawdopodobieństwem własność ograniczonej izometrii. Co więcej, można wyciągnąć z nich wnioski, że dla ustalonej pary  $(m, n)$  losowa macierz gaussowska  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  ma niższą stałą  $s$ -ograniczonej izometrii niż odpowiadająca jej macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Wynika to najprawdopodobniej z faktu, że zmienna losowa  $\|\mathbf{Ax}\|_2^2$  ma w przypadku macierzy i wektorów kwaternionowych mniejszą wariancję niż analogiczna zmienna losowa w przypadku rzeczywistym.

Wydaje się, że można porównać wyniki przeprowadzonego eksperymentu z tezą Twierdzenia 4.15 i Wniosku 4.16. Przypomnijmy, że zgodnie z naszymi wcześniejszymi rozważaniami, jeśli

$$m \geq 160\delta^{-2}s \ln \frac{en}{s},$$

to z prawdopodobieństwem równym co najmniej  $1 - 2 \exp\left(-\frac{3}{32}\delta^2 m\right)$  stała  $s$ -ograniczonej izometrii  $\delta_s$  macierzy  $\mathbf{A}$  spełnia  $\delta_s < \delta$ , gdzie  $0 < \delta \leq 1$ . Oszacowanie to jest jednak użyteczne jedynie dla bardzo dużych  $n$  (rzędu kilkuset tysięcy) i  $s \ll n$  (rzędu kilkunastu). Przypadek, który zaprezentowaliśmy w symulacjach numerycznych, ograniczał się zaledwie do  $n = 256$  i  $s = 32$ . Należy jednak mieć na uwadze, że oszacowania, które stosowaliśmy w dowodzie Twierdzenia 4.15 nie były optymalne i można je znacznie poprawić, co sugerują również wyniki eksperymentu.

**5.2. Stabilna rekonstrukcja wektorów kwaternionowych.** Wiemy już, że kwaternionowe losowe macierze gaussowskie mają z dużym prawdopodobieństwem własność  $s$ -ograniczonej izometrii dla dużych  $n$  i małych  $s$ . Eksperymenty numeryczne pozwalają przypuszczać, że jest to prawda również dla mniejszych  $n$ . Możemy zatem spróbować przeprowadzić numeryczną symulację odzyskiwania kwaternionowych sygnałów rzadkich w wyniku minimalizacji normy  $\ell_1$ . Zajmiemy się jedynie przypadkiem, w którym pomiary są wykonywane bezbłędnie.

Przypomnijmy, że rozważany problem optymalizacyjny, to minimalizacja normy  $\ell_1$ , tzn. zadanie

$$(5.1) \quad \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{H}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \mathbf{Az} = \mathbf{y},$$

gdzie  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in \mathbb{H}^m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$  i  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ . Podobnie jak analogiczny problem dla macierzy i wektorów o wartościach zespolonych, można to zadanie wyrazić w języku programowania stożkowego drugiego stopnia (ang. *second-order cone programming* – SOCP) [23]. Powtarzając rozumowanie przeprowadzone przez autorów [100], problem (5.1) możemy zapisać w równoważnej postaci

$$(5.2) \quad \arg \min_{t \in \mathbb{R}_+} t \quad \text{pod warunkiem} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Az}, \|\mathbf{z}\|_1 \leq t,$$

co prezentowaliśmy już także w pracach [3, 4, 15].

Rozbijmy wektory  $\mathbf{y}$  i  $\mathbf{z}$  na osobne wektory reprezentujące część rzeczywistą i poszczególne części urojone

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_r + \mathbf{y}_i \mathbf{i} + \mathbf{y}_j \mathbf{j} + \mathbf{y}_k \mathbf{k}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}_r + \mathbf{z}_i \mathbf{i} + \mathbf{z}_j \mathbf{j} + \mathbf{z}_k \mathbf{k},$$

gdzie  $\mathbf{y}_r, \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{z}_r, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^n$ . Wprowadzamy standardowe oznaczenie

$$\mathbf{z}_r = (z_{r,1}, \dots, z_{r,n})^T, \quad \mathbf{z}_i = (z_{i,1}, \dots, z_{i,n})^T, \quad \mathbf{z}_j = (z_{j,1}, \dots, z_{j,n})^T, \quad \mathbf{z}_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})^T,$$

a ponadto niech  $\mathbf{a}_k \in \mathbb{H}^m$  będzie  $k$ -tą kolumną macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , i tak jak w poprzednim kroku  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{r,k} + \mathbf{a}_{i,k} \mathbf{i} + \mathbf{a}_{j,k} \mathbf{j} + \mathbf{a}_{k,k} \mathbf{k}$ , gdzie  $\mathbf{a}_{r,k}, \mathbf{a}_{i,k}, \mathbf{a}_{j,k}, \mathbf{a}_{k,k} \in \mathbb{R}^m$ . Zauważmy, że drugie ograniczenie w (5.2) możemy przepisać jako

$$\|(z_{r,k}, z_{i,k}, z_{j,k}, z_{k,k})^T\|_2 \leq t_k \quad \text{dla } k \in \{1, \dots, n\},$$

gdzie  $t_k$  są pewnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $\sum_{k=1}^n t_k = t$ . Dzięki tej notacji możemy zapisać problem (5.2) w języku macierzy i wektorów o wartościach rzeczywistych:

$$(5.3) \quad \arg \min_{\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{z}} \quad \text{pod warunkiem} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{z}}$$

$$\text{oraz} \quad \|(z_{r,k}, z_{i,k}, z_{j,k}, z_{k,k})^T\|_2 \leq t_k \quad \text{dla } k \in \{1, \dots, n\},$$

gdzie

$$(5.4) \quad \tilde{\mathbf{z}} = (t_1, z_{r,1}, z_{i,1}, z_{j,1}, z_{k,1}, \dots, t_n, z_{r,n}, z_{i,n}, z_{j,n}, z_{k,n})^T \in \mathbb{R}^{5n},$$

$$(5.5) \quad \mathbf{c} = (1, 0, 0, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^{5n},$$

$$(5.6) \quad \tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_r^T, \mathbf{y}_i^T, \mathbf{y}_j^T, \mathbf{y}_k^T)^T \in \mathbb{R}^{4m},$$

$$(5.7) \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{a}_{r,1} & -\mathbf{a}_{i,1} & -\mathbf{a}_{j,1} & -\mathbf{a}_{k,1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{r,n} & -\mathbf{a}_{i,n} & -\mathbf{a}_{j,n} & -\mathbf{a}_{k,n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_{i,1} & \mathbf{a}_{r,1} & -\mathbf{a}_{k,1} & \mathbf{a}_{j,1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{i,n} & \mathbf{a}_{r,n} & -\mathbf{a}_{k,n} & \mathbf{a}_{j,n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_{j,1} & \mathbf{a}_{k,1} & \mathbf{a}_{r,1} & -\mathbf{a}_{i,1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{j,n} & \mathbf{a}_{k,n} & \mathbf{a}_{r,n} & -\mathbf{a}_{i,n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_{k,1} & -\mathbf{a}_{j,1} & \mathbf{a}_{i,1} & \mathbf{a}_{r,1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{k,n} & -\mathbf{a}_{j,n} & \mathbf{a}_{i,n} & \mathbf{a}_{r,n} \end{pmatrix}$$

i  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{4m \times 5n}$ .

Jest to standardowe sformułowanie problemu SOCP, które można rozwiązać z wykorzystaniem dostępnego pakietu SeDuMi dla środowiska MATLAB [90]. Znajdując wówczas rozwiązanie

$$(5.8) \quad \tilde{\mathbf{x}}^\# = (t_1, x_{r,1}^\#, x_{i,1}^\#, x_{j,1}^\#, x_{k,1}^\#, \dots, t_n, x_{r,n}^\#, x_{i,n}^\#, x_{j,n}^\#, x_{k,n}^\#)^T \in \mathbb{R}^{5n}$$

problemu (5.3) otrzymujemy rozwiązanie

$$(5.9) \quad \mathbf{x}^\# = (x_{r,1}^\# + x_{i,1}^\# \mathbf{i} + x_{j,1}^\# \mathbf{j} + x_{k,1}^\# \mathbf{k}, \dots, x_{r,n}^\# + x_{i,n}^\# \mathbf{i} + x_{j,n}^\# \mathbf{j} + x_{k,n}^\# \mathbf{k}) \in \mathbb{H}^n$$

oryginalnego problemu (5.1).

Eksperyment miał następujący przebieg:

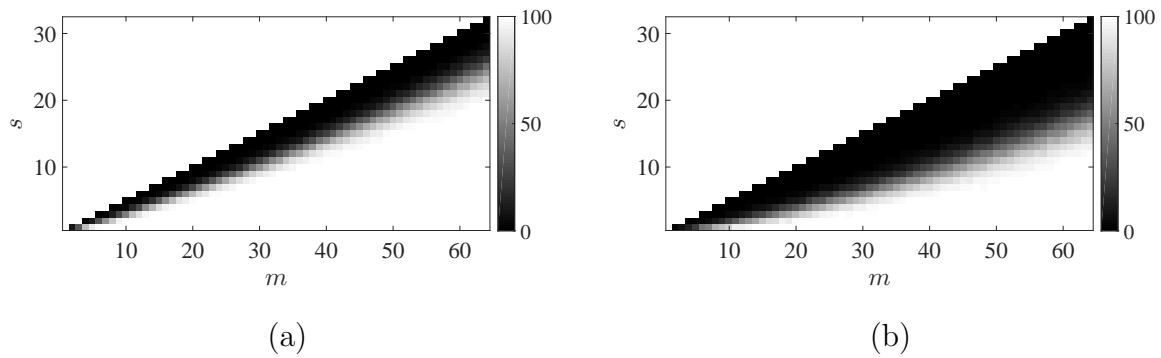
- 1° ustal stałe  $n = 256$  (długość wektora  $\mathbf{x}$ ) i  $m$  (liczba pomiarów, tzn. długość wektora  $\mathbf{y}$ ) i wygeneruj macierz pomiarową  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ , której elementy są kwaternionami wylosowanymi z niezależnych rozkładów normalnych  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, \frac{1}{m})$ ;
- 2° wybierz rzadkość sygnału  $s \leq \frac{m}{2}$  i nośnik  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  (losowo), taki że  $\#S = s$ , oraz wygeneruj wektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$  taki, że  $\text{supp } \mathbf{x} = S$ , którego współrzędne są kwaternionami wygenerowanymi z niezależnych rozkładów normalnych  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, 1)$ ;
- 3° wyznacz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{H}^m$ ;
- 4° wyznacz wektory  $\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{c}$  i macierz  $\tilde{\mathbf{A}}$  jak w (5.4)–(5.7);
- 5° wywołaj program SeDuMi do rozwiązania problemu sformułowanego w (5.3) i wyznacz rozwiązanie  $\tilde{\mathbf{x}}^{\#}$ ;
- 6° wyznacz wektor  $\mathbf{x}^{\#}$  za pomocą (5.9) i oblicz błędy rekonstrukcji (w sensie normy  $\ell_1$  oraz  $\ell_2$ ), tzn.  $\|\mathbf{x}^{\#} - \mathbf{x}\|_1$  i  $\|\mathbf{x}^{\#} - \mathbf{x}\|_2$ .

Dla każdej pary  $(m, s)$  wykonaliśmy 1000 eksperymentów i zapisaliśmy błędy rekonstrukcji oraz liczbę dokładnych rekonstrukcji (uznajemy, że rekonstrukcja jest dokładna, jeśli  $\|\mathbf{x}^{\#} - \mathbf{x}\|_2 \leq 10^{-7}$ ). Eksperyment przeprowadziliśmy dla  $m = 2, \dots, 64$  oraz  $s = 1, \dots, \frac{m}{2}$ . Zakres parametru  $s$  został wybrany nieprzypadkowo – wiemy z ogólnej teorii, że minimalną liczbą pomiarów, która pozwala na rekonstrukcję wektora  $s$ -rzadkiego z wykorzystaniem metod oszczędnego próbkowania jest  $m \geq 2s$  [53, Theorem 2.13].

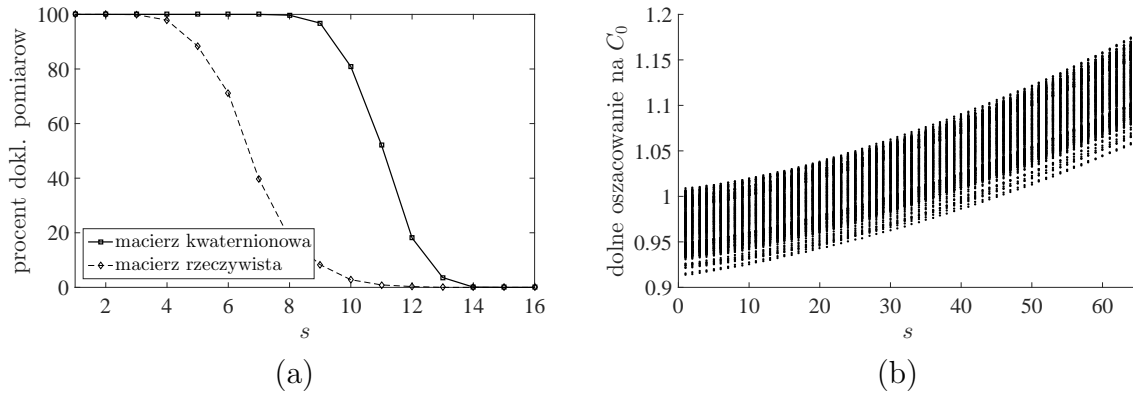
Wyniki eksperymentu przedstawione są na Rys. 5.5(a). Wykres przedstawia mapę procentu dokładnej rekonstrukcji w zależności od liczby pomiarów  $m$  oraz rzadkości  $s$  wektora. Symulacje potwierdzają wyniki teoretyczne – odpowiedni dobór liczby pomiarów do rzadkości wektora gwarantuje niemal dokładne odtworzenie wyjściowego wektora – dla par  $m = 32$  i  $s \leq 9$  odzyskujemy ponad 95% wektorów, podobnie dla  $m = 64$  i  $s \leq 20$ . Przeprowadziliśmy również analogiczny eksperyment dla macierzy  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  i wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Wyniki tego eksperymentu zaprezentowano na Rys. 5.5(b). Można zauważyć, że procent dokładnej rekonstrukcji dla odpowiadających sobie par  $(m, s)$  jest niższy w przypadku rzeczywistym niż w przypadku kwaternionowym (por. Rys. 5.6(a)).

Przeprowadziliśmy również eksperyment ilustrujący oszacowania z Wniosku 4.16 dla wektorów, które nie są rzadkie. Dla ustalonych  $n = 256$  oraz  $m = 32$  wygenerowaliśmy macierz pomiarową  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ , której elementy są kwaternionami wylosowanymi z niezależnych rozkładów normalnych  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, \frac{1}{m})$  oraz wylosowaliśmy 1000 wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ , których współrzędne są kwaternionami wygenerowanymi z niezależnych rozkładów normalnych  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, 1)$  (nie zakładając nic o rzadkości). Zastosowaliśmy następnie kroki 3°–6° opisanego wyżej algorytmu do przybliżonego zrekonstruowania wektorów. Na podstawie błędów rekonstrukcji, korzystając z nierówności (4.22), uzyskaliśmy oszacowanie

$$(5.10) \quad \frac{\|\mathbf{x}^{\#} - \mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{|s}\|_1} \leq C_0,$$



RYSUNEK 5.5. Wyniki eksperymentu numerycznego dla  $n = 256$  i różnych wartości  $m$  i  $s$ . Poziom szarości odpowiada procentowi dokładnych pomiarów. (a)  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ , (b)  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

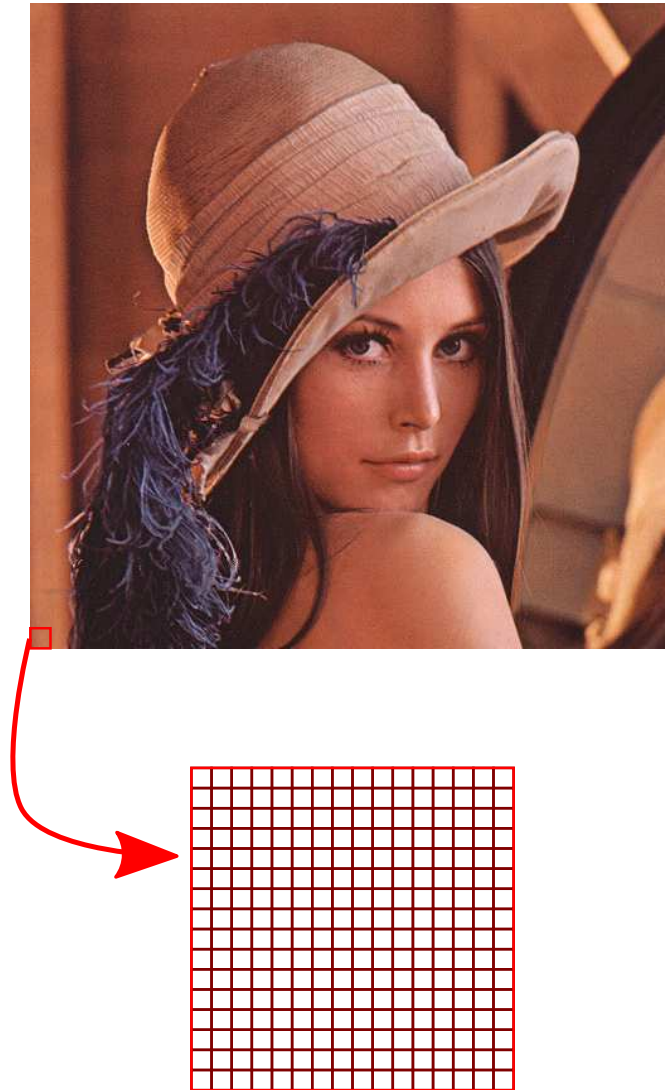


RYSUNEK 5.6. (a) Porównanie wyników eksperymentu numerycznego dla  $n = 256$ ,  $m = 32$  i różnych wartości  $s$ . (b) Dolne oszacowanie stałej  $C_0$  we Wniosku 4.16 uzyskane z nierówności (5.10) dla  $n = 256$  i  $m = 32$ .

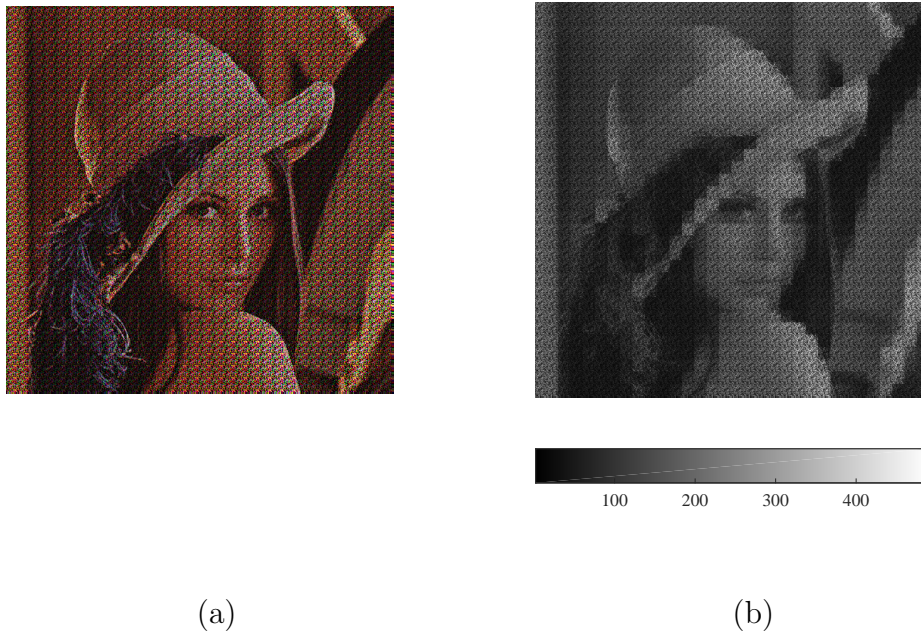
gdzie  $\mathbf{x}_{|s}$  jest najlepszym  $s$ -rzadkim przybliżeniem  $\mathbf{x}$ . Wyniki symulacji przedstawiono na Rys. 5.6(b) w formie wykresu punktowego – każdy punkt reprezentuje dolne ograniczenie na  $C_0$  dla pojedynczego wektora  $\mathbf{x}$  i rzadkości  $s$ . Zgodnie z oczekiwaniami zależność od  $s$  dla ustalonego  $m$  jest monotoniczna (co wynika z monotoniczności stałych  $s$ -ograniczonej izometrii).

**5.3. Dane rzeczywiste.** Eksperyment przeprowadzony w Sekcji 5.2 został wykonany z wykorzystaniem wektorów  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ , które były generowane losowo. Analogiczny eksperyment przeprowadziliśmy na danych rzeczywistych, tzn. na danych obrazowych.

Wyjściowym sygnałem był klasyczny kolorowy obraz Lena (por. Rys. 5.7) o wymiarach  $512 \times 512$  pikseli, w skali RGB. Każda składowa kolorowa została przypisana do jednej z jednostek urojonych sygnału  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{512 \cdot 512}$ , a część rzeczywista pozostała zerowa. Każda z części urojonych wszystkich współrzędnych wektora  $\mathbf{x}$  ma wartości z przedziału  $[0, 255]$ . Ze względu na ograniczone możliwości obliczeniowe wyjściowy sygnał należało podzielić na bloki wielkości  $16 \times 16$  pikseli, uzyskując w ten sposób zbiór 1024 sygnałów  $\mathbf{x}_\ell \in \mathbb{H}^n$ , gdzie  $n = 16^2 = 256$  i piksele wybierane były wierszami. Znając położenie każdego z bloków można było odtworzyć obraz po rekonstrukcji.



RYSUNEK 5.7. Wyjściowy obraz Lena wraz ze schematycznym przedstawieniem podziału na bloki wielkości  $16 \times 16$  pikseli w pierwszym eksperymencie.



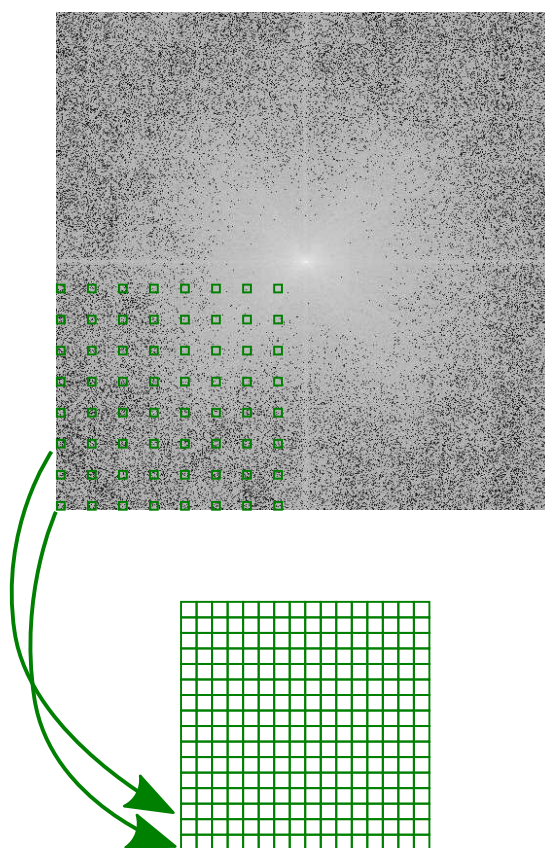
RYSUNEK 5.8. (a) Obraz uzyskany w wyniku rekonstrukcji w pierwszym eksperymencie. (b) Mapa modułu (kwaternionowego) błędu rekonstrukcji.

Dla całego zbioru sygnałów wygenerowaliśmy macierz pomiarową  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ , której elementy są kwaternionami wylosowanymi z niezależnych rozkładów normalnych  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, \frac{1}{m})$ , gdzie  $m = 32$ . Dla każdego wektora  $\mathbf{x}_\ell$  wyznaczyliśmy  $\mathbf{y}_\ell = \mathbf{A}\mathbf{x}_\ell$  i przeprowadziliśmy rekonstrukcję za pomocą minimalizacji normy  $\ell_1$  tak jak w Sekcji 5.2. Wyniki eksperymentu przedstawione są na Rys. 5.8. Mimo, że informacja przedstawiona na obrazie jest rozpoznawalna, to wyniku rekonstrukcji nie można uznać za satysfakcjonujący. Należy jednak pamiętać, że teoria oszczędnego próbkowania dotyczy rekonstrukcji sygnałów rzadkich, a obraz w swojej oryginalnej dziedzinie taki nie jest.

Jedną z reprezentacji, które są w przybliżeniu rzadkie, jest reprezentacja za pomocą dyskretnej transformacji Fouriera (w przypadku klasycznym). Mając to na uwadze, powtórzyliśmy eksperyment, uznając tym razem za wyjściowy sygnał dyskretną kwaternionową transformatę Fouriera obrazu:

$$\mathbf{X}_{m,n} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_{i,j} e^{-2\pi i m/M} e^{-2\pi j n/N},$$

gdzie  $\mathbf{x}_{i,j}$  jest wyjściowym obrazem (indeksowanym dwoma parametrami,  $i, j$ , tzn. zapisanym jako macierz) oraz  $M = N = 512$ . Szczegółowe rozważania na temat transformacji Fouriera znajdują się w Rozdziale 2. Tak uzyskany obraz jest sygnałem kwaternionowym (por. Rys. 5.9), jednak ze względu na możliwości obliczeniowe i tym razem należy go podzielić na bloki. Ze względu na strukturę sygnału, tzn. duże wartości w „centrum”



RYSUNEK 5.9. Kwarternionowa transformata Fouriera obrazu Lena (logarytm naturalny modułu) wraz ze schematycznym przedstawieniem podziału na bloki wielkości  $16 \times 16$  pikseli w drugim eksperymencie.

transformaty oraz wartości bliskie zeru na „obrzeżach”, każdy blok wielkości  $16 \times 16$  pikseli został utworzony z co 32-ego piksela (w poziomie i pionie) transformaty Fouriera (co schematycznie przedstawione jest na Rys. 5.9) i w ten sposób uzyskaliśmy ponownie zbiór 1024 sygnałów  $\hat{\mathbf{x}}_\ell \in \mathbb{H}^{256}$ .

Tak jak we wcześniejszym eksperymencie, dla całego zbioru sygnałów wygenerowaliśmy macierz pomiarową  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ , której elementy są kwaternionami wylosowanymi z niezależnych rozkładów normalnych  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, \frac{1}{m})$ , gdzie  $m = 32$ . Dla każdego wektora  $\hat{\mathbf{x}}_\ell$  wyznaczyliśmy  $\hat{\mathbf{y}}_\ell = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\ell$  i przeprowadziliśmy rekonstrukcję za pomocą minimalizacji normy  $\ell_1$ . Wyniki tej części eksperymentu przedstawione są na Rys. 5.10. Wyniki w tym przypadku są dużo lepsze niż w przypadku sygnału przedstawionego w oryginalnej bazie, a błąd rekonstrukcji nie przekracza (co do kwaternionowego modułu) 0,4 (przy maksymalnej wartości występującej w obrazie równej 255). Potwierdza to nasze przypuszczenia, że reprezentacja obrazu kolorowego za pomocą współczynników dyskretnej kwaternionowej transformacji Fouriera jest odpowiednio rzadka i daje możliwość zastosowania metod oszczędnego próbkowania do rozwiązania problemu rekonstrukcji.





RYSUNEK 5.10. (a) Obraz uzyskany w wyniku rekonstrukcji w drugim eksperymencie. (b) Mapa modułu (kwaternionowego) błędu rekonstrukcji.

W literaturze można spotkać pierwsze prace teoretyczne dotyczące związków metod oszczędnego próbkowania i kwaternionowych transformacji Fouriera [29], jednak nie jest to obiekt zainteresowania tej pracy. Przeprowadzone eksperymenty ilustrują (i jednocześnie potwierdzają) uzyskane wyniki teoretyczne i budzą nadzieję na szersze zastosowanie kwaternionowych metod oszczędnego próbkowania w analizie i przetwarzaniu obrazów kolorowych.

Wyniki przedstawione w tym rozdziale są podstawą kwaternionowej teorii oszczędnego próbkowania i punktem wyjścia do dalszych badań. Są to naturalne uogólnienia znanych w literaturze twierdzeń, dzięki którym możliwe stało się inne podejście do teorii sygnałów, w którym nie korzysta się z klasycznego Twierdzenia Kotelnikowa-Shannona o próbkowaniu. Badania te są jednocześnie odpowiedzią na najnowsze publikacje, w których prezentowane są eksperymenty numeryczne w tej dziedzinie, nie przedstawiające żadnego teoretycznego uzasadnienia uzyskiwanych wyników. Należy zaznaczyć, że dowody zawarte w Sekcjach 4 i 5 są autorskie i powstały we współpracy z dr Agnieszką Badeńską z Wydziału Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej.

Warto wspomnieć także o potencjalnych kierunkach dalszych prac w tym obszarze. Badania teoretyczne będą skupiały się tak naprawdę na dwóch zagadnieniach – osłabieniu

założeń w Twierdzeniu 4.7 na wielkość stałej ograniczonej izometrii oraz na znalezieniu innych przykładów kwaternionowych macierzy pomiarowych, które mają własność ograniczonej izometrii. Ewentualne sukcesy tych prac pozwolą na przejście do etapu badań eksperymentalnych, zarówno w formie symulacji numerycznych, jak i prób praktycznego zastosowania wyników teoretycznych. Kwaterniony można bezpośrednio zastosować w przetwarzaniu obrazów kolorowych i dzięki nim możliwa staje się jednoczesna analiza wszystkich składowych kolorowych (np. w modelu RGB). W klasycznym podejściu każda ze składowych musiała być analizowana niezależnie od pozostałych.

Algebrę kwaternionów można tak naprawdę zastosować do opisu wszelkich wielkości, które mają wartości wektorowe (o maksymalnie czterech współrzędnych, które można przypisać poszczególnym składowym kwaternionu). Na szczególną uwagę zasługują badania obrazowej diagnostyki medycznej. Zazwyczaj obrazy uzyskiwane np. w tomografii komputerowej mają wartości skalarne (tzn. można je prezentować w skali odcieni szarości), jednak badania czynnościowe mózgu w tomografii rezonansu magnetycznego, np. DTI (ang. *diffusion tensor imaging*), generują dane, które są naturalnie wielkościami wielowymiarowymi – na podstawie informacji o tensorze dyfuzji można zobrazować kierunek oraz ciągłość włókien nerwowych. Zgodnie z naszą wiedzą dotychczas nie były prowadzone badania w zakresie wykorzystania metod oszczędnego próbkowania w obrazowaniu dyfuzji w mózgu, jednak wydaje się, że jest to tematyka o bardzo dużym potencjale.

## ROZDZIAŁ 2

### Oktoniony w analizie sygnałów i systemów

Druga część pracy poświęcona jest zastosowaniu algebry oktonionów, wprowadzonej w Sekcji 2.2, w teorii sygnałów i systemów. O ile w przypadku kwaternionów problem braku przemienności mnożenia nie był aż tak dotkliwy, to przy próbach zastosowania oktonionów sytuacja staje się bardziej skomplikowana ze względu na brak łączności mnożenia. W związku z tym praktyczne zastosowania oktonionów były do tej pory ograniczone do zagadnień fizyki matematycznej (głównie elektrodynamiki czy fizyki kwantowej). Zaczęły się mimo to pojawiać prace badające własności funkcji wielu zmiennych skupiając się na analizie ich widma hiperzespólonego.

Podstawowym narzędziem, jakie jest stosowane w tych rozważaniach, jest przekształcenie Fouriera. Znane jest uogólnienie przekształcenia Fouriera na przypadek kwaternionowy (kwaternionowa transformacja Fouriera) i jego własności zostały już dobrze zbadane. W literaturze można znaleźć również obszerną analizę własności uogólnienia transformacji Fouriera na algebry Clifforda wyższych rzędów. Można jednak te rozważania rozszerzyć również w innym kierunku, tzn. na algebry Cayleya-Dicksona wyższych rzędów, np. oktoniony. Zdefiniowano w tym celu transformację Fouriera w sensie Cayleya-Dicksona funkcji o wartościach rzeczywistych trzech zmiennych, jednak poza abstrakcyjną definicją w literaturze nie można było do tej pory znaleźć niemal żadnych własności tego przekształcenia. W tym rozdziale skupimy się na jego szczególnym przypadku, tzn. na oktonionowej transformacji Fouriera.

Okazuje się, że mimo braku ważnych własności w algebrze oktonionów (przemienności i łączności mnożenia), wiele z własności znanych zarówno dla klasycznej (zespolonej), jak i kwaternionowej transformacji Fouriera ma swoje odpowiedniki dla transformacji oktonionowej. Co więcej te nowe własności sugerują, że można zastosować to narzędzie do analizy pewnych systemów wielowymiarowych, które da się opisać liniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi czy też równaniami różnicowymi.

Rozdział ten składa się z trzech sekcji. Sekcja 6 jest przeglądem aktualnej literatury poświęconej hiperzespólonym przekształceniom Fouriera, w szczególności kwaternionowej transformacji Fouriera (QFT) oraz transformacjom Fouriera w sensie Clifforda. Przytoczymy własności QFT, których odpowiedniki dla oktonionowej transformacji Fouriera wyprowadzimy w dalszej części rozdziału. Poruszymy również problem zastosowania tego narzędzia w analizie rozwiązań pewnych równań różniczkowych cząstkowych (dwóch

---

zmiennych), co rozszerzymy później na przypadek funkcji wielu zmiennych. Wprowadzimy definicję transformacji Fouriera w sensie Clifforda oraz w sensie Cayleya-Dicksona oraz przedstawimy ich zastosowania opisywane w literaturze. W Sekcji 7 przytoczymy definicję oktonionowej transformacji Fouriera (OFT) oraz wykażemy podstawowe twierdzenia związane z poprawnością definicji i własnościami OFT. Skupimy się także na wykazaniu oktonionowego odpowiednika twierdzenia o hermitowskiej symetrii, co jest jednym z istotniejszych wyników w tej teorii. Dzięki wyprowadzonym narzędziom będzie można zastosować OFT w analizie pewnych systemów liniowych i stacjonarnych o trzech zmiennych oraz do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, co opiszemy w Sekcji 8.

Z rozważaniami przedstawionymi w tym rozdziale ściśle związany jest autorski pakiet obliczeniowy `Octonions` do środowiska Wolfram Mathematica. Został on opracowany jako narzędzie ułatwiające obliczenia w algebrze oktonionów i bez niego nie byłoby możliwe wyprowadzenie wielu zależności przedstawionych w tym rozdziale. Opis możliwości pakietu znajduje się w Dodatku B.

## 6. Hiperzespolone przekształcenie Fouriera w teorii sygnałów – przegląd literatury

Transformacja Fouriera jest niezwykle ważnym narzędziem analizy matematycznej, które pojawia się w wielu dziedzinach współczesnej nauki, zwłaszcza w naukach inżynierskich czy matematycznych. W teorii sygnałów metody analizy częstotliwościowej są oparte właśnie na przekształceniu Fouriera, które pozwala analizować sygnały nie tylko w swojej naturalnej dziedzinie (np. czasu), ale także w dziedzinie występujących w sygnale częstotliwości [2, 92].

Okazuje się jednak, że wiele zagadnień jednowymiarowej teorii sygnałów (tzn. takiej, w której mamy tylko jedną zmienną niezależną, najczęściej interpretowaną jako czas) nie daje się w prosty sposób przenieść na przypadek wielowymiarowy. Przypomnijmy, że  $n$ -wymiarową (klasyczną) transformatą Fouriera funkcji  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy [39]

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}} \{u\}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) e^{-i2\pi \mathbf{f} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

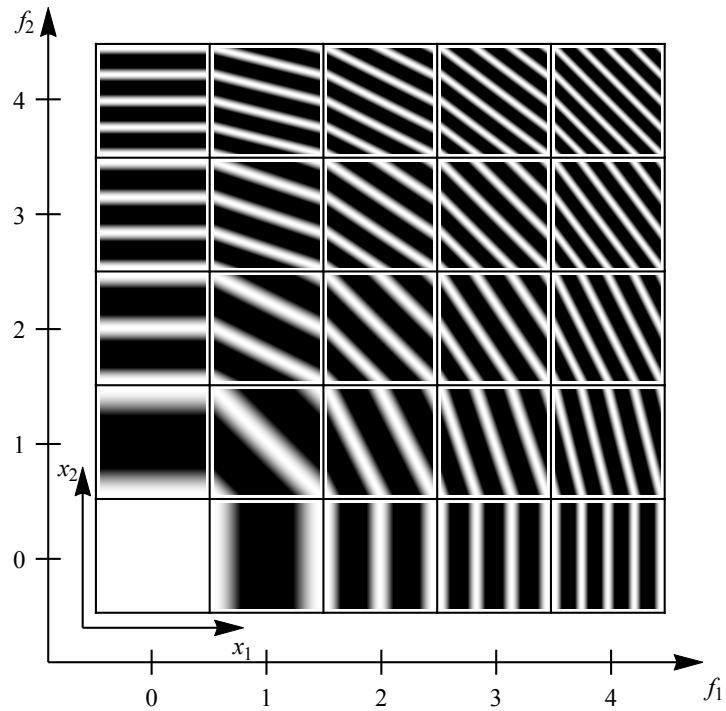
gdzie  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}$  jest iloczynem skalarnym wektorów  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  oraz  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Zauważmy, że jądro przekształcenia Fouriera, tzn.  $e^{-i2\pi \mathbf{f} \cdot \mathbf{x}}$ , jest dla dowolnego  $n$  funkcją w pewnym sensie jednowymiarową – jest to odpowiednik fali, która rozchodzi się w jednym kierunku wyznaczonym przez wektor  $\mathbf{f}$  (zmienia się tylko wzdłuż prostej wyznaczonej przez wektor  $\mathbf{f}$ ) i jest stała na ortogonalnej do niego  $(n - 1)$ -wymiarowej hiperpłaszczyźnie (zob. Rys. 6.1(a), [20]). Konsekwencją tego faktu jest brak pewnych własności symetrii w przypadku funkcji  $n$ -wymiarowych, o czym będziemy mówić w dalszej części rozdziału.

Jednym z głównych powodów stojących za zdefiniowaniem hiperzespolonych odpowiedników transformacji Fouriera był wspomniany wcześniej jednowymiarowy charakter jądra przekształcenia. Hiperzespolone transformacje Fouriera po raz pierwszy pojawiły się w literaturze w 1976 roku w artykule laureata Nagrody Nobla R. R. Ernsta [47], gdzie zostały użyte w analizie 2-wymiarowego widma w spektroskopii NMR. Transformata funkcji dwóch zmiennych została zdefiniowana jako

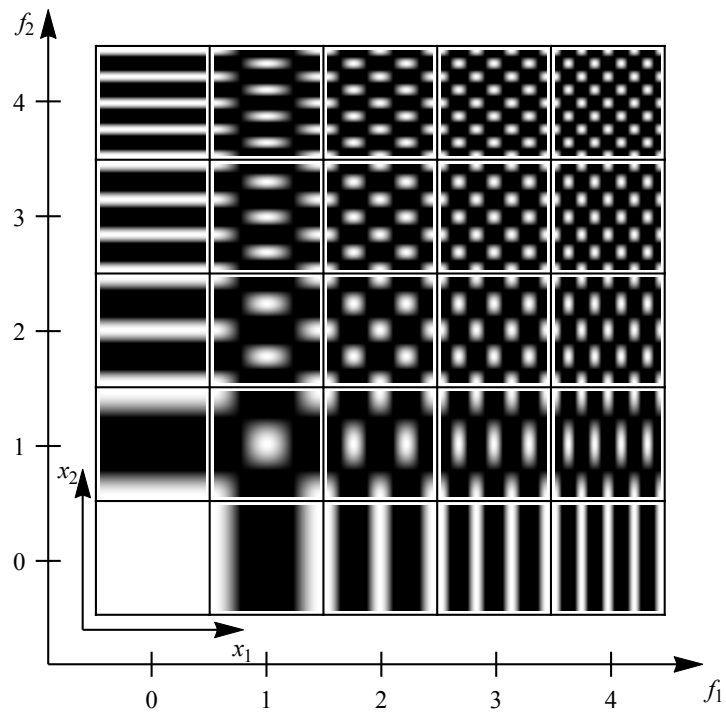
$$\mathcal{F}_{\text{R-QFT}} \{u\}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathbf{x}) e^{-i2\pi f_1 x_1} e^{-j2\pi f_2 x_2} d\mathbf{x},$$

co pokrywa się ze współczesną definicją *prawostronnej kwaternionowej transformacji Fouriera* (R-QFT). Nie zdefiniowano jednak tam w sposób kompletny algebry, w jakiej wykonywano obliczenia. Zostało to poprawione w książce [48] oraz artykule [35], gdzie wykorzystano algebrę przemienną, w której  $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{k}$  oraz  $\mathbf{k}^2 = 1$ . Użycie dwóch różnych jednostek urojonych pozwoliło na niezależną analizę widma w każdym z dwóch wymiarów przestrzennych.

Kwaternionowa transformata Fouriera została „na nowo” zdefiniowana w 1992 roku w rozprawie doktorskiej [43] i rok później w artykule [44], których autorem jest T. A. Ell.



(a)



(b)

RYСУNEK 6.1. Wykresy funkcji jądra (jej części rzeczywistej) dla różnych częstotliwości: (a) klasycznej transformacji Fouriera, (b) kwaternionowej transformacji Fouriera.

Zaproponował on następujące przekształcenie

$$\mathcal{F}_{2\text{S-QFT}_1} \{u\}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-j2\pi f_1 x_1} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{k}2\pi f_2 x_2} d\mathbf{x},$$

nazywane ze względu na położenie składowych jądra przekształcenia *dwustronną kwaternionową transformacją Fouriera* (2S-QFT). Zauważmy, że w przeciwieństwie do klasycznej transformacji Fouriera, jądro przekształcenia nie jest już funkcją jednowymiarową, ale zmienia się niezależnie w dwóch prostopadłych kierunkach (zob. Rys. 6.1(b)). Ell pokazał w swojej pracy, że 2S-QFT ma podobne własności co klasyczna transformacja Fouriera, w szczególności zachodzą poniższe twierdzenia o transformacie funkcji przesuniętej, przeskalowanej czy zróżniczkowanej [44].

**Twierdzenie 6.1.** *Niech  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $U = \mathcal{F}_{2\text{S-QFT}_1} \{u\}$ , wówczas*

$$\begin{aligned} u(x_1 - x_0, x_2) &\stackrel{\mathcal{F}_{2\text{S-QFT}_1}}{\iff} e^{-j2\pi f_1 x_0} \cdot U(\mathbf{f}), \\ u(x_1, x_2 - x_0) &\stackrel{\mathcal{F}_{2\text{S-QFT}_1}}{\iff} U(\mathbf{f}) \cdot e^{-\mathbf{k}2\pi f_2 x_0}, \\ u(ax_1, bx_2) &\stackrel{\mathcal{F}_{2\text{S-QFT}_1}}{\iff} \frac{1}{|ab|} U\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_2}{b}\right), \\ \frac{\partial^{k_1+k_2} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} &\stackrel{\mathcal{F}_{2\text{S-QFT}_1}}{\iff} (j2\pi f_1)^{k_1} U(\mathbf{f}) (\mathbf{k}2\pi f_2)^{k_2}, \end{aligned}$$

gdzie  $\stackrel{\mathcal{F}_{2\text{S-QFT}_1}}{\iff}$  oznacza parę funkcja–transformata.

Własności te umożliwiły analizę systemów liniowych stacjonarnych o dwóch zmiennych [44], w których rozważania można było przeprowadzać dla każdej zmiennej niezależnie. Ta niezależność była szczególnie widoczna w przypadku systemów, które różniczkują po każdej ze zmiennych – stosując klasyczną transformację Fouriera do pochodnej mieszanej, współczynnik, przez który mnożymy pochodną, jest rzeczywisty. Sprawia to, że otrzymana funkcja jest nieodróżnialna od funkcji, która nie była różniczkowana ani razu. Można to uznać za utratę pewnej informacji o własnościach badanego systemu.

Problem, który pojawia się w związku z definicją kwaternionowej transformacji Fouriera to brak własności przemienności mnożenia kwaternionów. Sprawia to, że formuły wiążące np. transformatę splotu dwóch funkcji z transformatami samych funkcji nie są tak proste jak w przypadku klasycznej transformacji Fouriera (twierdzenie o dualności splotu i mnożenia, [39]). Aby uprościć obliczenia wykorzystano hiperzespolone algebry przemienne, tzw. *liczby podwójne zespolone*  $\mathbb{E}$  [33] (ang. *double complex numbers*). Podobnie jak algebra kwaternionów, jest to algebra rzędu 4 nad ciałem  $\mathbb{R}$ , a mnożenie  $\otimes$  zdefiniowane jest równościami

$$-\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = -(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} \otimes \mathbf{k}) = -1.$$

Tak jak kwaterniony liczby podwójne zespolone zapisuje się jako czwórki liczb rzeczywistych, tzn.  $s = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ , ale największe możliwości daje reprezentacja za pomocą dwóch liczb zespolonych, tzn.

$$s = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} = (r_0 + r_3\mathbf{k}) + (r_1 - r_2\mathbf{k}) \otimes \mathbf{i} = c_0 + \overline{c_1} \otimes \mathbf{i},$$

gdzie  $c_0 = r_0 + r_3\mathbf{k}$  i  $c_1 = r_1 + r_2\mathbf{k}$  są liczbami zespolonymi zapisanymi z wykorzystaniem jednostki urojonej  $\mathbf{k}$ . Mnożenie dwóch liczb podwójnych zespolonych  $s = c_0 + \overline{c_1} \otimes \mathbf{i}$  i  $t = d_0 + \overline{d_1} \otimes \mathbf{i}$  można wówczas zdefiniować wzorem

$$s \otimes t = (c_0d_0 + \overline{c_1d_1}) + (c_0\overline{d_1} + \overline{c_1}d_0) \otimes \mathbf{i},$$

gdzie mnożenie liczb zespolonych odbywa się zgodnie z klasycznymi regułami. Widać, że mnożenie w algebrze  $\mathbb{E}$  jest przemienne, jednak ceną za tę własność jest to, że nie wszystkie niezerowe elementy algebry  $\mathbb{E}$  mają element odwrotny. Użycie reguł mnożenia algebry liczb podwójnych zespolonych pozwala jednak zapisać transformatę kwaternionową splotu dwóch funkcji jako iloczyn (w algebrze  $\mathbb{E}$ ) transformat każdej z nich [44]. Rozważania te uogólniono później na algebry wyższych rzędów [51]. Szczegółowym badaniom tych własności i ich uogólnieniu na algebrę oktonionów poświęcona jest Sekcja 8.

Prace Ella były głównie teoretyczne, jednak w niedługim czasie ich wyniki zostały wykorzystane w analizie obrazów kolorowych, które mogą być reprezentowane jako funkcje o wartościach kwaternionowych – każdy kanał kolorowy w modelu RGB (czerwony, zielony i niebieski) jest przypisywany do innej jednostki urojonej (część rzeczywista jest przyjmowana jako równa zero) [82, 83]. Do dziś przetwarzanie obrazów kolorowych jest głównym obszarem zastosowań kwaternionowej transformacji Fouriera [18, 45, 46, 80, 81].

Podobne rozważania prowadził również T. Bülow [19, 20], który zdefiniował kwaternionową transformację Fouriera (QFT) z innymi jednostkami urojonymi, tzn.

$$\mathcal{F}_{\text{QFT}} \{u\}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2\pi f_1 x_1} u(\mathbf{x}) e^{-j2\pi f_2 x_2} d\mathbf{x},$$

która w przypadku funkcji o wartościach rzeczywistych pokrywa się z definicją zaproponowaną przez Ernsta. Poza (ponownym) wykazaniem własności QFT, zwrócił on uwagę na kolejną istotną wadę klasycznej transformacji Fouriera, którą udało się usunąć poprzez wprowadzenie QFT [19]. Zauważmy, że w przypadku funkcji dwóch zmiennych informacja o funkcji o wartościach rzeczywistych jest zawarta w półprzestrzeni widmowej, np.  $f_1 \geq 0$ , co wynika z twierdzenia o hermitowskiej symetrii transformacji Fouriera, podczas gdy stosując podejście kwaternionowe, pełna informacja o funkcji o wartościach rzeczywistych zawarta jest w pojedynczym kwadrancie płaszczyzny widmowej, np.  $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$ . Dokładne rozważania na ten temat przeprowadzimy w Sekcji 7.

Definicja QFT wprowadzona przez Bülowa różniła się od definicji Ella jedynie użytymi jednostkami urojonymi i podobne zmiany wprowadzali również inni uczeni [31]. Wykorzystywano także algebry przemienne, które w znaczny sposób ułatwiały obliczenia [19, 51].



Każda z wymienionych definicji miała jednak na celu umożliwienie analizy funkcji dwóch zmiennych niezależnie w każdym z kierunków wyznaczanych przez osie układu współrzędnych. Inne podejście zostało zaproponowane w artykule Sangwine’a oraz Ella [83], gdzie zamiast jednostek urojonych z bazy algebry kwaternionów (czyli  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  lub  $\mathbf{k}$ ) użyto dowolnego czysto urojonego pierwiastka  $\boldsymbol{\mu}$  z liczby  $-1$  (jest ich nieskończenie wiele [76]) oraz pojedynczej funkcji eksponencjalnej w jądrze przekształcenia. Zdefiniowano *jednostronną kwaternionową transformację Fouriera* (1S-QFT) jako

$$\mathcal{F}_{1\text{S-QFT}}\{u\}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{\mu}2\pi\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

co z kolei pozwoliło na skonstruowanie kwaternionowej transformacji Fouriera funkcji jednej zmiennej, tzn.

$$\mathcal{F}_{1\text{S-QFT}}\{u\}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\boldsymbol{\mu}2\pi f x} u(x) \, dx.$$

Zauważmy, że powyższa definicja ma sens jedynie w przypadku funkcji o wartościach kwaternionowych – dla funkcji o wartościach rzeczywistych definicja ta pokrywa się z definicją klasycznej transformacji Fouriera. Tak zdefiniowane przekształcenie, nazywane również lewostronnym przekształceniem Fouriera, zostało zaimplementowane w postaci dyskretnej w środowisku MATLAB [84] wraz ze swoim prawostronnym odpowiednikiem.

Kwaternionowa transformacja Fouriera w formie zdefiniowanej przez Ella czy Bülowa może zostać zastosowana jedynie do sygnałów dwuwymiarowych (tzn. do funkcji dwóch zmiennych, np. obrazów). Chcąc badać sygnały trójwymiarowe, lub w pełnej ogólności  $n$ -wymiarowe (np. dane wolumetryczne czy sekwencje obrazów), należy rozszerzyć pojęcie hiperzespólonej transformacji Fouriera. Jedno z podejść wykorzystuje  $n$ -wymiarową *transformację Fouriera w sensie Clifforda* [17–20], tzn.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}\text{-FT}}\{u\}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n e^{-\mathbf{e}_i 2\pi f_i x_i} \, d\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  są wektorami bazowymi algebry Clifforda  $\mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R})$ . Jest to zaledwie jedno z możliwych podejść i wielu uczonych wykorzystywało różne algebry Clifforda  $\mathcal{C}_{p,q}(\mathbb{R})$ ,  $p + q = n$ , a nie tylko taką, w której  $p = 0$ ,  $q = n$  [64, 74]. Zauważmy jednak, że w przypadku  $n = 1$  otrzymujemy klasyczną transformację Fouriera funkcji jednej zmiennej, a dla  $n = 2$  kwaternionową transformację Fouriera funkcji dwóch zmiennych (w przypadku funkcji o wartościach rzeczywistych definicja ta pokrywa się z tą, którą wprowadził Bülow). Własności transformat Fouriera w sensie Clifforda zostały już w literaturze dobrze zbadane [18, 20, 87] i zastosowane w wielu zagadnieniach [40, 41, 50].

Podobnie jak w przypadku kwaternionowej transformacji Fouriera, własności transformat Clifforda również komplikują się ze względu na brak przemienności mnożenia. Rozszerzono jednak badania prowadzone przez Davenporta [33] na algebry wyższych rzędów, definiując hiperzespólone algebry przemienne (przemienne pierścienie z jedyneką)

i w konsekwencji hiperzespolone przemienne transformacje Fouriera [51]. Głównym celem tych rozważań było ułatwienie obliczeń i prostsze sformułowanie odpowiedników wielu klasycznych twierdzeń.

Nasze prace skupiają się jednak na innym uogólnieniu hiperzespolonych transformacji Fouriera. W artykule [85] zaproponowano definicję *transformacji Fouriera w sensie Cayleya-Dicksona*, tzn.

$$\mathcal{F}_{\text{CD-FT}}\{u\}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n e^{-\mathbf{e}_{2^{i-1}} 2\pi f_i x_i} d\mathbf{x},$$

w której  $\mathbf{e}_{2^{i-1}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , są wektorami bazowymi w algebrach Cayleya-Dicksona rzędu  $2^n$  nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Powyższa definicja posłużyła do ponownego zdefiniowania analitycznego sygnału hiperzespolonego i teoria ta była rozwijana w serii artykułów K. M. Snopek i S. L. Hahna [58–61, 86–89]. Zauważmy, że podobnie jak transformacja Fouriera w sensie Clifforda, „nowe” przekształcenie Fouriera pokrywa się dla  $n = 1$  z klasyczną transformacją Fouriera, a dla  $n = 2$  z kwaternionową transformacją Fouriera. W przypadku  $n = 3$  otrzymujemy jednak przekształcenie, w którym jądro zawiera trzy jednostki urojone  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  i  $\mathbf{e}_4$  algebry oktonionów. Temu przekształceniu (nazywanemu *oktonionową transformacją Fouriera*) poświęcona jest dalsza część tego rozdziału.

Teoria sygnałów wykorzystująca transformacje Fouriera w sensie Cayleya-Dicksona jest stosunkowo nową gałęzią tej dyscypliny i do tej pory była rozwijana tylko przez jeden zespół uczonych na Politechnice Warszawskiej (S. L. Hahn i K. M. Snopek). Może się zrodzić więc pytanie czy jest uzasadnione, by definiować kolejny rodzaj hiperzespolonej transformacji Fouriera. Wielokrotnie jednak zaznaczano, że żadna z definicji, które do tej pory pojawiły się w literaturze, nie może zostać uznana za tę jedyną właściwą hiperzespoloną transformację Fouriera. Mimo że wszystkie umożliwiają niezależną analizę sygnału względem każdej zmiennej, każda z nich ma nieco inne własności, które pojawiają się w innych zastosowaniach lub, jak w przypadku przemiennej transformacji, są narzędziem upraszczającym obliczenia. Własności oktonionowej transformacji Fouriera, które wykażemy w Sekcji 7 i 8 pokażą, że jest to narzędzie, które można z powodzeniem wykorzystać w teorii sygnałów trójwymiarowych (trzech zmiennych). Postępy w teoretycznych pracach w tej dziedzinie mają wówczas szansę zostać wykorzystane w praktycznych problemach.

## 7. Oktonionowa transformacja Fouriera

Sekcja ta jest w całości poświęcona oktonionowemu przekształceniu Fouriera (ang. *octonion Fourier transform*, OFT), które jest szczególnym przypadkiem transformacji Fouriera w sensie Cayleya-Dicksona. Została ona zdefiniowana w [85] i była wykorzystywana w szeregu publikacji [58–61, 85–89]. Zgodnie z naszą wiedzą do tej pory nie pojawiły się jednak żadne prace, w których zbadano poprawność definicji czy też wykazano podstawowe własności OFT.

Na początku sformułujemy definicję OFT funkcji o wartościach oktonionowych trzech zmiennych oraz udowodnimy twierdzenie o transformacji odwrotnej. Warto nadmienić, że jest to rozszerzenie wyniku opublikowanego w [16], gdzie rozważaliśmy jedynie OFT funkcji o wartościach rzeczywistych. Wykażemy również pewne elementarne własności transformacji i przedstawimy podstawowe narzędzie, które będzie wykorzystane w dowodach kolejnych twierdzeń, tj. rozkład funkcji na składowe o różnej parzystości oraz wpływ tego rozkładu na postać OFT danej funkcji.

W dalszej części wykażemy szereg własności OFT, których odpowiedniki są znane zarówno dla klasycznej (zespolonej), jak i kwaternionowej transformacji Fouriera, m.in. twierdzenie o hermitowskiej symetrii (uogólniające pojęcie hermitowskiej symetrii na funkcje o wartościach oktonionowych), twierdzenia o modulacji i przesunięciu w dziedzinie przestrzeni oraz twierdzenie Plancherela. Udowodnione wyniki pozwolą na zdefiniowanie oktonionowego widma gęstości mocy oraz na wykazanie oktonionowego odpowiednika Twierdzenia Wienera-Chinczyna. Wszystkie wymienione własności zostaną wyprowadzone oraz opatrzone odpowiednimi przykładami, które zilustrują działanie twierdzeń.

Sekcja 7 jest w pełni autorska i jest wynikiem prac prowadzonych w Pracowni Sygnałów i Sieci Radiokomunikacyjnych na Wydziale Elektroniki i Technik Informacyjnych PW. Część przedstawionych w niej wyników została opublikowana w artykule [16].

**7.1. Definicja i podstawowe własności.** Rozważmy funkcję trzech zmiennych rzeczywistych o wartościach oktonionowych  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$ , tzn.

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \dots + u_7(\mathbf{x})\mathbf{e}_7, \quad u_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 0, \dots, 7, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Oktonionową transformatę Fouriera funkcji  $u(\mathbf{x})$  definiujemy jako

$$(7.1) \quad U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3).$$

Ponieważ mnożenie w algebrze oktonionów nie jest łączne, należy zwrócić uwagę na fakt, że mnożenie w powyższej całce jest wykonywane od lewej do prawej. Jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień, to będziemy omijać indeks dolny w oznaczeniu  $U_{\text{OFT}}$ . W ogólności, transformatę oktonionową dowolnej funkcji  $u$  będziemy oznaczać jako  $\mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$  (lub  $\mathcal{F}\{u\}$ ), analogicznie do transformaty kwaternionowej ( $\mathcal{F}_{\text{QFT}}\{u\}$ ) lub zespolonej ( $\mathcal{F}_{\text{CFT}}\{u\}$ ).

Wybór oraz kolejność jednostek urojonych w jądrze przekształcenia (7.1) nie są przypadkowe. Dla funkcji  $u$  o wartościach rzeczywistych rozwijając jądro przekształcenia otrzymamy

$$\begin{aligned}
& (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \\
&= \left( (c_1 - s_1\mathbf{e}_1) \cdot (c_2 - s_2\mathbf{e}_2) \right) \cdot (c_3 - s_3\mathbf{e}_4) \\
&= (c_1c_2 - s_1c_2\mathbf{e}_1 - c_1s_2\mathbf{e}_2 + s_1s_2\mathbf{e}_3) \cdot (c_3 - s_3\mathbf{e}_4) \\
&= c_1c_2c_3 - s_1c_2c_3\mathbf{e}_1 - c_1s_2c_3\mathbf{e}_2 + s_1s_2c_3\mathbf{e}_3 \\
(7.2) \quad & - c_1c_2s_3\mathbf{e}_4 + s_1c_2s_3\mathbf{e}_5 + c_1s_2s_3\mathbf{e}_6 - s_1s_2s_3\mathbf{e}_7,
\end{aligned}$$

gdzie  $c_j = \cos(2\pi f_j x_j)$ ,  $s_j = \sin(2\pi f_j x_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Postać dana wzorem (7.2) jest oktonionem zawierającym wszystkie części urojone. Analogiczny wynik otrzymamy rozważając funkcje  $u$  o wartościach oktonionowych. Całka (7.1) określa więc przekształcenie, które przyporządkowuje funkcji oktonionowej  $u$  zmiennej rzeczywistej  $\mathbf{x}$  funkcję oktonionową  $U_{\text{OFT}}$  zmiennej rzeczywistej  $\mathbf{f}$ .

Warunki istnienia całki (7.1) są takie same jak w przypadku klasycznej (zespolonej) transformacji Fouriera i nie będziemy się nimi zajmować w tej pracy. Ważne jest jednak zagadnienie przekształcenia odwrotnego. Można je sformułować w postaci poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie 7.1.** *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  będzie funkcją ciągłą i bezwzględnie całkowalną (w sensie Lebesgue'a). Wówczas*

$$(7.3) \quad u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} d\mathbf{f}$$

(gdzie mnożenie jest wykonywane od lewej do prawej).

Podane w powyższym twierdzeniu założenia są dość mocne i można je osłabić, podobnie jak w klasycznej teorii transformacji Fouriera [39]. Dowód Twierdzenia 7.1 opiera się na Twierdzeniu Całkowym Fouriera, przytoczonym za [39].

**Twierdzenie 7.2.** *Niech  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą i bezwzględnie całkowalną (w sensie Lebesgue'a). Wówczas*

$$(7.4) \quad u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{y}) e^{i2\pi \mathbf{f} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d\mathbf{y} d\mathbf{f}.$$

Należy zauważyć, że algebra oktonionów  $\mathbb{O}$  zawiera siedem zespolonych (przemiennych i łącznych) podciał, każde związane z jedną jednostką urojoną  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , i Twierdzenie Całkowe Fouriera pozostaje prawdziwe, gdy zmienimy  $\mathbf{i}$  na dowolną inną oktonionową jednostkę urojoną.

DOWÓD TWIERDZENIA 7.1. Zauważmy, że wystarczy pokazać następującą równość

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{y}) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \\ \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \, dy_1 dy_2 dy_3,$$

gdzie mnożenie oktonionów odbywa się od lewej do prawej. Ponadto zapisując funkcję  $u$  w postaci  $u = u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + u_7 \mathbf{e}_7$  i korzystając z rozdzielności mnożenia oktonionów względem dodawania widzimy, że teza będzie spełniona, jeśli pokażemy, że zachodzą następujące równości

$$(7.5) \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} u_0(\mathbf{y}) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \\ \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \, dy_1 dy_2 dy_3,$$

$$(7.6) \quad u_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \\ \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \, dy_1 dy_2 dy_3, \quad i = 1, \dots, 7.$$

Zacznijmy od równości (7.5). Z alternatywności algebry oktonionów otrzymujemy, że

$$\left( \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \\ = \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot \left( e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \right).$$

Dzięki temu, korzystając z Twierdzenia 7.2, dostaniemy

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} u_0(\mathbf{y}) \cdot \left( \left( \left( \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \right) \right) \right) \\ \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \, dy_1 dy_2 dy_3 \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \left( \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \right) \right) \\ \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_0(\mathbf{y}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, dy_3 df_3 \right) \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \\ \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \, dy_1 dy_2 df_1 df_2 \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \left( \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot u_0(y_1, y_2, x_3) \right) \right) \\ \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \, dy_1 dy_2 df_1 df_2 \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} u_0(y_1, y_2, x_3) \cdot \left( \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \right) \\ \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \, dy_1 dy_2 df_1 df_2 = (\star).$$

Ponownie korzystając z alternatywności algebry oktonionów mamy

$$(e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2}) \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} = e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot (e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2})$$

i stąd

$$\begin{aligned} (\star) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y_1, y_2, x_3) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} dy_2 df_2 \right) \right) \\ &\quad \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} dy_1 df_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot u_0(y_1, x_2, x_3) \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} dy_1 df_1 \\ &= u_0(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Dowód równości (7.6) jest analogiczny i korzysta z faktu, że dla dowolnej jednostki urojonej  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , zachodzą równości

$$(7.7) \quad \left( \left( (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \\ = \left( (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot \left( e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \right),$$

$$(7.8) \quad \left( (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} = (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2})$$

$$(7.9) \quad (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} = \mathbf{e}_i \cdot (e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1}).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \left( \left( \left( (u_i(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} dy df \\ &\stackrel{(7.7)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \left( \left( (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_i(\mathbf{y}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 y_3} \cdot e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} dy_3 df_3 \right) \right) \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \\ &\quad \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} dy_1 dy_2 df_1 df_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \left( \left( (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot u_i(y_1, y_2, x_3) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} dy_1 dy_2 df_1 df_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} u_i(y_1, y_2, x_3) \cdot \left( \left( (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \right) \\ &\quad \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} dy_1 dy_2 df_1 df_2 \\ &\stackrel{(7.8)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 y_1}) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_i(y_1, y_2, x_3) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 y_2} \cdot e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} dy_2 df_2 \right) \right) \\ &\quad \cdot e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} dy_1 df_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_i 2\pi f_1 y_1}) \cdot u_i(y_1, x_2, x_3) \right) \cdot e^{\mathbf{e}_i 2\pi f_1 x_1} dy_1 df_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_i(y_1, x_2, x_3) \cdot (\mathbf{e}_i \cdot e^{-\mathbf{e}_i 2\pi f_1 y_1}) \cdot e^{\mathbf{e}_i 2\pi f_1 x_1} dy_1 df_1 \\
 &\stackrel{(7.9)}{=} \mathbf{e}_i \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_i(y_1, x_2, x_3) \cdot e^{-\mathbf{e}_i 2\pi f_1 y_1} \cdot e^{\mathbf{e}_i 2\pi f_1 x_1} dy_1 df_1 \\
 &= \mathbf{e}_i \cdot u_i(x_1, x_2, x_3).
 \end{aligned}$$

Kończy to dowód Twierdzenia. □

Definicja OFT jako całki danej wzorem (7.1) jest naturalnym rozszerzeniem definicji prawostronnej kwaternionowej transformacji Fouriera [35, 48]. Zauważmy, że traktując kwaterniony i liczby zespolone jako podalgę oktonionów, można napisać

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{u\} (f_1, f_2, f_3) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{\text{QFT}} \{u(\cdot, \cdot, x_3)\} (f_1, f_2) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} dx_3, \\
 \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{u\} (f_1, f_2, f_3) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{u(\cdot, x_2, x_3)\} (f_1) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} dx_3,
 \end{aligned}$$

odpowiednio dla funkcji o wartościach kwaternionowych i zespolonych. Warto zauważyć, że w definicji OFT można użyć dowolnej z 28 oktonionowych trójek, które nie tworzą łącznego kwaternionowego nieprzemiennej podciała algebry  $\mathbb{O}$ . Można również zdefiniować tzw. jednostronną OFT, w której jądro przekształcenia to pojedynczy wyraz  $e^{-\boldsymbol{\mu} 2\pi \mathbf{f} \cdot \mathbf{x}}$  dla pewnego oktonionu  $\boldsymbol{\mu}$ , takiego że  $|\boldsymbol{\mu}| = 1$ . Przekształcenie zdefiniowane w ten sposób mają analogiczne własności, jednak w tej pracy zajmiemy się jedynie OFT daną wzorem (7.1).

**PRZYKŁAD 7.3.** Rozważmy funkcję Gaussa trzech zmiennych

$$(7.10) \quad u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\det \boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

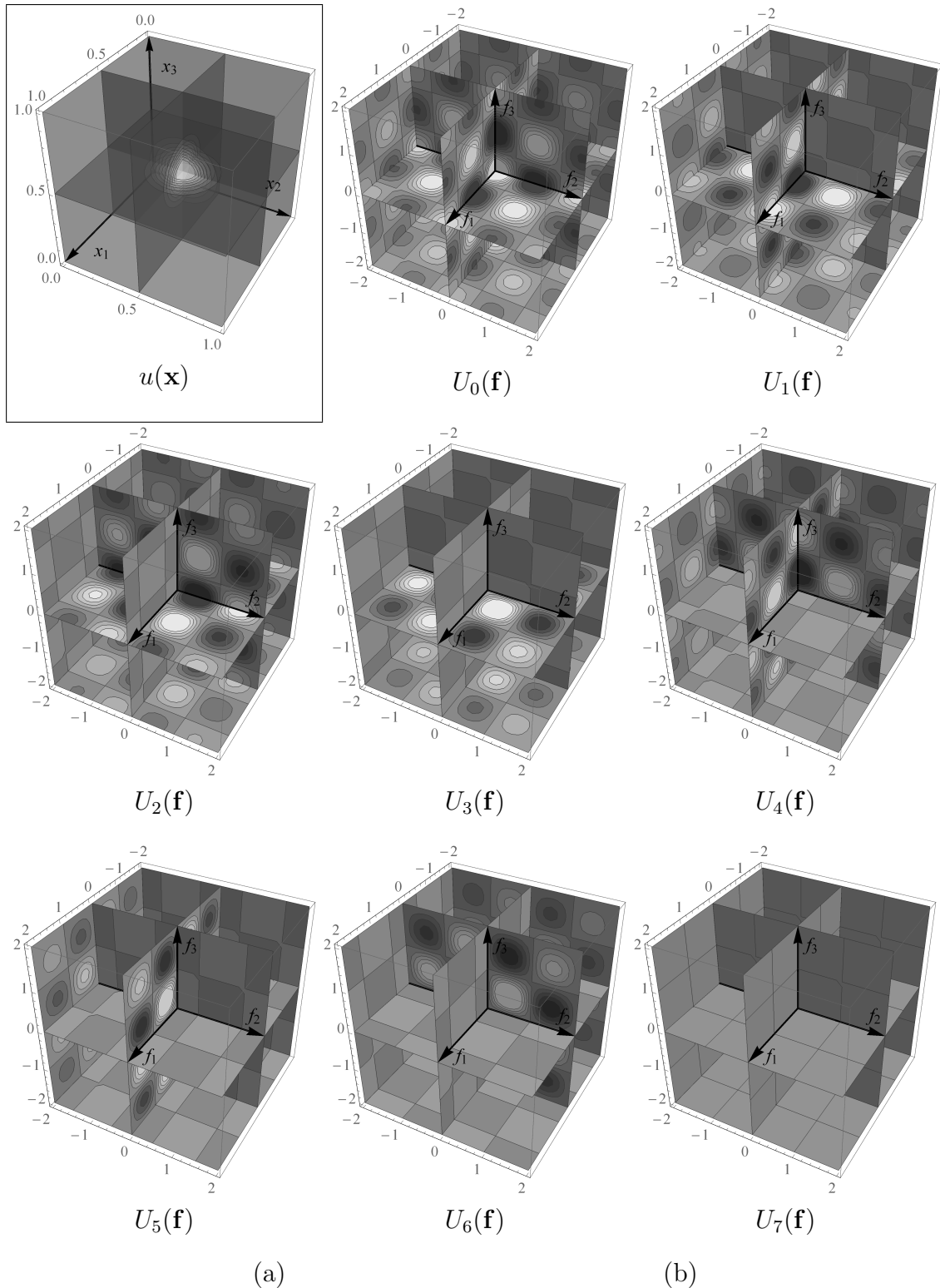
gdzie  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$  oraz

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}.$$

Jeśli wszystkie  $\rho_{ij} = 0$ , to  $u$  jest gaussowskim sygnałem separowalnym, tzn. można zapisać  $u(\mathbf{x}) = u_1(x_1) \cdot u_2(x_2) \cdot u_3(x_3)$ . Dla uproszczenia obliczeń rozważmy ten przypadek. Przeprowadzając bezpośrednie obliczenia otrzymamy OFT funkcji  $u$  w postaci

$$\begin{aligned}
 U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) &= \exp\{-2\pi^2 \mathbf{f}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{f}\} \cdot (c_1 c_2 c_3 - s_1 c_2 c_3 \mathbf{e}_1 - c_1 s_2 c_3 \mathbf{e}_2 + s_1 s_2 c_3 \mathbf{e}_3 \\
 &\quad - c_1 c_2 s_3 \mathbf{e}_4 + s_1 c_2 s_3 \mathbf{e}_5 + c_1 s_2 s_3 \mathbf{e}_6 - s_1 s_2 s_3 \mathbf{e}_7),
 \end{aligned}$$

gdzie  $c_j = \cos(2\pi f_j \mu_j)$  oraz  $s_j = \sin(2\pi f_j \mu_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ . Wykresy przedstawiające  $U_{\text{OFT}}$  zamieszczono na Rys. 7.2.



RYСУNEK 7.2. Wizualizacja separowalnej funkcji Gaussa  $u$  z Przykładu 7.3 oraz części rzeczywistej i części urojonych OFT tej funkcji.



Podobnie jak w przypadku klasycznej (zespolonej) transformacji Fouriera należy wprowadzić pojęcia widma sygnału.

DEFINICJA 7.4. Oktonionową transformatę Fouriera  $U_{\text{OFT}}$  sygnału  $u$  nazywamy *widmem oktonionowym* sygnału.

Z pojęciem widma wiąże się problem wynikający z reprezentacji wykładniczej oktonionu. W rozważaniach na temat klasycznej transformacji Fouriera pojawiają się pojęcia *widma amplitudowego*, *widma fazowego*, *widma rzeczywistego* oraz *widma urojonego* sygnału  $u$ . Zauważmy, że widmo oktonionowe możemy przedstawić w postaci

$$U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = U_0(\mathbf{f}) + U_1(\mathbf{f})\mathbf{e}_1 + \dots + U_7(\mathbf{f})\mathbf{e}_7$$

i każda z funkcji  $U_i$ ,  $i = 0, \dots, 7$ , jest funkcją o wartościach rzeczywistych. O ile pojęcia widma amplitudowego oraz widma rzeczywistego nie budzą wątpliwości i możemy je zdefiniować w sposób klasyczny (odpowiednio jako  $|U_{\text{OFT}}|$  oraz  $U_0$ ), tak w przypadku widma oktonionowego należy określić aż 7 różnych widm urojonych.

Najbardziej skomplikowana jest kwestia widma fazowego – zgodnie z rozważaniami z Sekcji 2.2 każdy oktonion  $o \in \mathbb{O}$  można przedstawić w postaci

$$o = |o| e^{\boldsymbol{\mu} \cdot \varphi},$$

gdzie  $\boldsymbol{\mu}$  jest jednostkowym oktonionem o zerowej części rzeczywistej, a  $\varphi$  jest liczbą z przedziału  $[0, \pi]$ . Sugeruje to możliwość klasycznego zdefiniowania oktonionowego widma fazowego, jednak należy pamiętać, że w przypadku funkcji o wartościach oktonionowych jednostkowy oktonion  $\boldsymbol{\mu}$  w wykładniku również jest funkcją. Wyklucza to klasyczne podejście. Analogiczna sytuacja miała miejsce dla transformacji kwaternionowej. Tam jednak można było skorzystać z postaci polarnej kwaternionu uwzględniającej tzw. kąty Eulera (por. [19] i rozważania w Sekcji 2.1). Jak wspomniano w Sekcji 2.2 nie jest znana analogiczna reprezentacja polarna oktonionów. W literaturze można spotkać jedynie hipotezę Hahna i Snopek [56], tj.

$$(7.11) \quad o = |o| e^{\phi_1 \mathbf{e}_1} e^{\phi_3 \mathbf{e}_3} e^{\phi_2 \mathbf{e}_2} e^{\phi_7 \mathbf{e}_7} e^{\phi_4 \mathbf{e}_4} e^{\phi_6 \mathbf{e}_6} e^{\phi_5 \mathbf{e}_5},$$

jednak nie została ona do tej pory udowodniona. Poprawne zdefiniowanie oktonionowego widma fazowego będzie możliwe dopiero wtedy, gdy wykazany zostanie wzór (7.11) na reprezentację polarną oktonionu.

Rozważania na temat własności oktonionowej transformacji Fouriera należy rozpocząć od podania elementarnego twierdzenia. W każdym z podanych twierdzeń (w tej i w kolejnych sekcjach) będziemy zakładać, że funkcje  $u$  i  $v$  mają dobrze określone oktonionowe transformaty Fouriera, które będziemy oznaczać odpowiednio przez  $U_{\text{OFT}}$  oraz  $V_{\text{OFT}}$ .

TWIERDZENIE 7.5. *Oktonionowa transformacja Fouriera jest operacją  $\mathbb{R}$ -liniową, tzn.*

$$(7.12) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{a \cdot u + b \cdot v\} = a \cdot \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{u\} + b \cdot \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{v\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dowód powyższej własności jest oczywisty i wynika z własności całki. Warto jednak skomentować fakt, że, w przeciwieństwie do klasycznej transformacji Fouriera (a także kwaternionowej transformacji Fouriera), transformacja oktonionowa nie jest w ogólności operacją liniową (precyzyjniej –  $\mathbb{O}$ -liniową), tzn. własność (7.12) nie zachodzi dla  $a, b \in \mathbb{O}$ . Wynika to z braku własności łączności mnożenia oktonionów. Jeśli jednak ograniczymy dziedzinę transformacji Fouriera do zbioru funkcji o wartościach rzeczywistych, to można wówczas traktować OFT jako przekształcenie liniowe. W dalszej części pracy będziemy często zawężać rozważania do tej klasy funkcji.

Oktonionową transformatę Fouriera można obliczać ze wzoru (7.1), choć w przypadku funkcji o wartościach rzeczywistych lub zespolonych można wykorzystać w tym celu transformatę klasyczną. Zachodzi poniższe twierdzenie, które jest uogólnieniem wyniku z pracy [89], gdzie udowodniony został analogiczny wzór dla funkcji o wartościach rzeczywistych.

TWIERDZENIE 7.6. *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , niech  $U = \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{u\}$  i niech  $U_{\text{OFT}} = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{u\}$ . Wówczas*

$$(7.13) \quad \begin{aligned} U_{\text{OFT}}(f_1, f_2, f_3) &= \frac{1}{4} \left( U(f_1, f_2, f_3) \cdot (1 - \mathbf{e}_3) + U(f_1, -f_2, f_3) \cdot (1 + \mathbf{e}_3) \right) \cdot (1 - \mathbf{e}_5) \\ &+ \frac{1}{4} \left( U(f_1, f_2, -f_3) \cdot (1 - \mathbf{e}_3) + U(f_1, -f_2, -f_3) \cdot (1 + \mathbf{e}_3) \right) \cdot (1 + \mathbf{e}_5) \end{aligned}$$

*i mnożenie oktonionów odbywa się od lewej do prawej.*

UWAGA 7.7. Odpowiadający temu twierdzeniu wzór (39) z [89] może wydawać się inny od (7.13), lecz po odpowiednich przekształceniach i skorzystaniu z hermitowskiej symetrii transformaty funkcji o wartościach rzeczywistych otrzymamy dokładnie powyższy wzór.

PRZYKŁAD 7.8. Wróćmy jeszcze do przykładu funkcji Gaussa trzech zmiennych. Klasyczna transformata Fouriera funkcji danej wzorem (7.10) jest równa

$$U(\mathbf{f}) = \exp\{-2\pi^2 \mathbf{f}^T \Sigma \mathbf{f}\} \cdot \exp\{-2\pi \mathbf{e}_1 \mathbf{f}^T \boldsymbol{\mu}\}.$$

Można łatwo pokazać, że podstawiając powyższą równość do wzoru (7.13), otrzymamy ten sam wzór co wcześniej.

DOWÓD TWIERDZENIA 7.6. W dowodzie prześledzimy i zmodyfikujemy kolejne kroki zaprezentowane w [89]. Z definicji klasycznej transformacji Fouriera otrzymujemy

$$U(f_1, f_2, f_3) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_2} e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_3} d\mathbf{x},$$

gdzie  $\alpha_j = 2\pi f_j x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Wówczas

$$(7.14) \quad \frac{1}{2} \left( U(f_1, f_2, f_3) + U(f_1, -f_2, f_3) \right) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} (\cos \alpha_2) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_3} d\mathbf{x},$$

$$(7.15) \quad \frac{1}{2} \left( U(f_1, f_2, f_3) - U(f_1, -f_2, f_3) \right) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} (-\mathbf{e}_1 \sin \alpha_2) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_3} d\mathbf{x}.$$

Zmieniając w równości (7.15) znak przy  $f_3$  oraz mnożąc z lewej strony przez  $\mathbf{e}_3$  otrzymamy

$$(7.16) \quad \frac{1}{2} \left( U(f_1, f_2, -f_3) - U(f_1, -f_2, -f_3) \right) \mathbf{e}_3 = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} (\mathbf{e}_2 \sin \alpha_2) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_3} d\mathbf{x},$$

co wynika z faktu, że

$$\left( \left( (u \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1}) \cdot \mathbf{e}_1 \right) \cdot e^{\mathbf{e}_1 \alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_3 = \left( (u \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1}) \cdot (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_3}$$

(z alternatywności algebry  $\mathbb{O}$ ). Odejmując od (7.14) otrzymaną równość (7.16) dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( U(f_1, f_2, f_3) + U(f_1, -f_2, f_3) \right) + \frac{1}{2} \left( U(f_1, -f_2, -f_3) - U(f_1, f_2, -f_3) \right) \mathbf{e}_3 \\ = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_3} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(7.17) \quad \begin{aligned} V(f_1, f_2, f_3) \\ = \frac{1}{2} \left( U(f_1, f_2, f_3) + U(f_1, -f_2, f_3) \right) + \frac{1}{2} \left( U(f_1, -f_2, -f_3) - U(f_1, f_2, -f_3) \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie jak wcześniej otrzymamy

$$(7.18) \quad \frac{1}{2} \left( V(f_1, f_2, f_3) + V(f_1, f_2, -f_3) \right) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} (\cos \alpha_3) d\mathbf{x},$$

$$(7.19) \quad \frac{1}{2} \left( V(f_1, f_2, f_3) - V(f_1, f_2, -f_3) \right) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} (-\mathbf{e}_1 \sin \alpha_3) d\mathbf{x}.$$

Zmieniając w równości (7.19) znak przy  $f_2$  oraz mnożąc z lewej strony przez  $\mathbf{e}_5$  otrzymamy

$$(7.20) \quad \frac{1}{2} \left( V(f_1, -f_2, f_3) - V(f_1, -f_2, -f_3) \right) \mathbf{e}_5 = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} (\mathbf{e}_4 \sin \alpha_3) d\mathbf{x}$$

(ponownie z alternatywności algebry  $\mathbb{O}$ ). Odejmując od (7.18) otrzymaną równość (7.20) dostaniemy

$$(7.21) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \left( V(f_1, f_2, f_3) + V(f_1, f_2, -f_3) \right) + \frac{1}{2} \left( V(f_1, -f_2, -f_3) - V(f_1, -f_2, f_3) \right) \mathbf{e}_5 \\ = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Podstawiając do wzoru (7.21) równość (7.17) i grupując wyrazy otrzymamy tezę.  $\square$

W dalszej części tej sekcji zawężymy rozważania do funkcji o wartościach rzeczywistych. Jak wykazano w [60] oktonionową transformatę Fouriera funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  można przedstawić jako sumę składników o różnej parzystości, tzn.

$$(7.22) \quad U = U_{eee} - U_{oee}\mathbf{e}_1 - U_{eoe}\mathbf{e}_2 + U_{ooe}\mathbf{e}_3 - U_{eoo}\mathbf{e}_4 + U_{o eo}\mathbf{e}_5 + U_{eoo}\mathbf{e}_6 - U_{ooo}\mathbf{e}_7,$$

gdzie  $U_{xyz}$ ,  $x, y, z \in \{e, o\}$  są zdefiniowane wzorami

$$(7.23) \quad U_{eee}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{eee}(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(7.24) \quad U_{oee}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{oee}(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(7.25) \quad U_{eoe}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{eoe}(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(7.26) \quad U_{ooe}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{ooe}(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(7.27) \quad U_{eoo}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{eoo}(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(7.28) \quad U_{o eo}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{o eo}(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(7.29) \quad U_{eoo}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{eoo}(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(7.30) \quad U_{ooo}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{ooo}(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , a funkcje  $u_{xyz}(\mathbf{x})$ ,  $x, y, z \in \{e, o\}$ , są ośmioma składnikami funkcji  $u$  o różnej parzystości względem zmiennych  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$ , tzn.

$$(7.31) \quad \begin{aligned} u_{xyz}(x_1, x_2, x_3) = & \left( u(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon_x u(-x_1, x_2, x_3) \right. \\ & + \varepsilon_y u(x_1, -x_2, x_3) + \varepsilon_x \varepsilon_y u(-x_1, -x_2, x_3) \\ & + \varepsilon_z u(x_1, x_2, -x_3) + \varepsilon_x \varepsilon_z u(-x_1, x_2, -x_3) \\ & \left. + \varepsilon_y \varepsilon_z u(x_1, -x_2, -x_3) + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z u(-x_1, -x_2, -x_3) \right) / 16, \end{aligned}$$

gdzie  $\varepsilon_x = 1$  jeśli  $x = e$  oraz  $\varepsilon_x = -1$  jeśli  $x = o$ , itd.

W powyższej notacji używamy indeksów  $e$  oraz  $o$  do wskazania, że funkcja jest parzysta ( $e$ , ang. *even*) lub nieparzysta ( $o$ , ang. *odd*) względem odpowiedniej zmiennej, np. funkcja  $u_{eoo}(\mathbf{x})$  jest parzysta względem zmiennych  $x_1$  i  $x_2$  oraz nieparzysta względem zmiennej  $x_3$ . Analogiczne rozumowanie odnosi się do współczynników  $U_{xyz}$ , np.  $U_{eoo}$  jest parzysty względem zmiennej  $f_1$  oraz nieparzysty względem zmiennych  $f_2$  i  $f_3$ .

Zauważmy, że w przypadku OFT funkcji o wartościach rzeczywistych wszystkie współczynniki  $U_{xyz}$  w równości (7.22) są funkcjami o wartościach rzeczywistych. Analogiczne wzory można otrzymać także w przypadku funkcji o wartościach oktonionowych, jednak wówczas współczynniki staną się również funkcjami o wartościach oktonionowych. Wróćmy do tych rozważań w Sekcji 7.4.

**7.2. Hermitowska symetria OFT.** Jedną z kluczowych własności klasycznej transformacji Fouriera jest tzw. hermitowska symetria, tzn. dla funkcji o wartościach rzeczywistych ( $n$  zmiennych) zachodzi

$$U_{\text{CFT}}(-\mathbf{f}) = \overline{U_{\text{CFT}}(\mathbf{f})}, \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n).$$

Można tę własność zinterpretować w sposób następujący – pełna informacja o funkcji  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest zawarta w pojedynczej półprzestrzeni częstotliwościowej (zazwyczaj przyjmuje się, że  $f_1 \geq 0$ ). Rozważając szczególny przypadek funkcji  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i stosując podejście kwaternionowe Bülow wykazał [19], że pełna informacja o sygnale jest zawarta w pojedynczej ćwiartce płaszczyzny częstotliwościowej ( $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$ ) i zachodzi kwaternionowy odpowiednik hermitowskiej symetrii QFT:

$$\begin{aligned} U_{\text{QFT}}(f_1, -f_2) &= \alpha_1(U_{\text{QFT}}(f_1, f_2)), \\ U_{\text{QFT}}(-f_1, f_2) &= \alpha_2(U_{\text{QFT}}(f_1, f_2)), \\ U_{\text{QFT}}(-f_1, -f_2) &= \alpha_3(U_{\text{QFT}}(f_1, f_2)), \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha_i(q) = -\mathbf{e}_i \cdot q \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są trzema anty-inwolucjami zdefiniowanymi w Sekcji 2.1, analogicznie jak dla algebry oktonionów. Funkcje o wartościach kwaternionowych spełniające powyższe trzy równości są nazywane hermitowsko symetrycznymi. Do tej pory nie był natomiast znany odpowiednik tych równości dla oktonionowej transformacji Fouriera.

Przytoczona w poprzedniej sekcji reprezentacja transformaty jako sumy składników o różnej parzystości jest podstawowym narzędziem w dowodzie hermitowskiej symetrii OFT. Przypomnijmy oznaczenia wprowadzone w Sekcji 2.2:

$$\begin{aligned} \forall_{o \in \mathbb{O}} \quad \alpha_i(o) &= -\mathbf{e}_i \cdot o \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, 7, \\ \forall_{o \in \mathbb{O}} \quad \alpha_{i_1, \dots, i_k}(o) &= (\alpha_{i_1} \circ \dots \circ \alpha_{i_k})(o), \quad i_1, \dots, i_k = 1, \dots, 7, \end{aligned}$$

gdzie  $\circ$  oznacza klasyczne złożenie funkcji.

**TWIERDZENIE 7.9.** Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i niech  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$ . Wówczas

$$(7.32) \quad U(-f_1, f_2, f_3) = \alpha_{6,4,2}(U(\mathbf{f})) = \alpha_{7,5,3,1}(U(\mathbf{f})),$$

$$(7.33) \quad U(f_1, -f_2, f_3) = \alpha_{5,4,1}(U(\mathbf{f})) = \alpha_{7,6,3,2}(U(\mathbf{f})),$$

$$(7.34) \quad U(f_1, f_2, -f_3) = \alpha_{3,2,1}(U(\mathbf{f})) = \alpha_{7,6,5,4}(U(\mathbf{f})),$$

$$(7.35) \quad U(-f_1, -f_2, f_3) = \alpha_{7,4,3}(U(\mathbf{f})) = \alpha_{6,5,2,1}(U(\mathbf{f})),$$

$$(7.36) \quad U(-f_1, f_2, -f_3) = \alpha_{7,5,2}(U(\mathbf{f})) = \alpha_{6,4,3,1}(U(\mathbf{f})),$$

$$(7.37) \quad U(f_1, -f_2, -f_3) = \alpha_{7,6,1}(U(\mathbf{f})) = \alpha_{5,4,3,2}(U(\mathbf{f})),$$

$$(7.38) \quad U(-f_1, -f_2, -f_3) = \alpha_{6,5,3}(U(\mathbf{f})) = \alpha_{7,4,2,1}(U(\mathbf{f})).$$

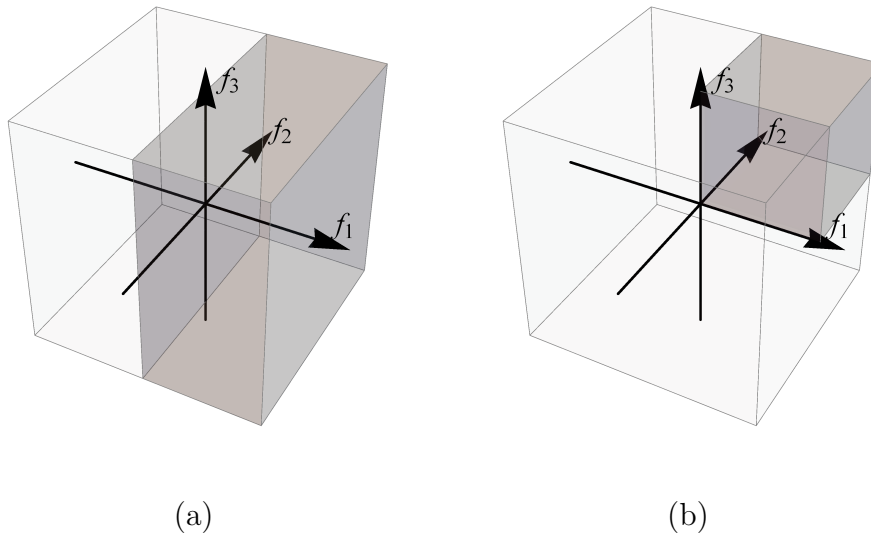
Tak jak w przypadku funkcji o wartościach kwaternionowych, możemy wprowadzić pojęcie hermitowskiej symetrii funkcji o wartościach oktonionowych.

DEFINICJA 7.10. Funkcję  $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  spełniającą równości (7.32)–(7.38) będziemy nazywać funkcją *hermitowsko symetryczną* (w sensie oktonionowym).

Zanim przejdziemy do dowodu powyższego twierdzenia zauważmy kilka faktów, które z niego wynikają. Część rzeczywista i wszystkie części urojone OFT funkcji o wartościach rzeczywistych są symetryczne lub antysymetryczne względem odpowiednich płaszczyzn. Widać to również na przykładzie funkcji Gaussa przytoczonej w Przykładach 7.3 i 7.8. Ponadto zachodzi poniższy wniosek.

WNIOSEK 7.11. *Pełna informacja o funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest zawarta w pojedynczym oktancie trójwymiarowej przestrzeni częstotliwości  $\{\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3: f_1, f_2, f_3 > 0\}$ .*

Jest to znaczna zmiana, w porównaniu do klasycznej transformaty Fouriera. Z twierdzenia o hermitowskiej symetrii klasycznej transformaty Fouriera wynika, że pełna informacja o funkcji trzech zmiennych o wartościach rzeczywistych jest zawarta w jednej półprzestrzeni widma zespolonego (np.  $\{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3: f_1 > 0\}$ ), podczas gdy stosując OFT jest zawarta w zaledwie jednym oktancie widma oktonionowego (Rys. 7.3).



RYSUNEK 7.3. W podejściu zespolonym informacja o funkcji trzech zmiennych jest zawarta w jednej półprzestrzeni (a), podczas gdy w podejściu oktonionowym pełna informacja o sygnale zawiera się w pojedynczym oktancie przestrzeni (b).

DOWÓD TWIERDZENIA 7.9. Wykażemy jedynie równość (7.32). Pozostałe równości dowodzi się analogicznie.

Rozważmy  $U(-f_1, f_2, f_3)$ . Rozkładając funkcję  $U$  na składniki o różnej parzystości, jak w równości (7.22), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 U(-f_1, f_2, f_3) &= U_{eee}(-f_1, f_2, f_3) \cdot 1 - U_{oee}(-f_1, f_2, f_3) \cdot e_1 \\
 &\quad - U_{eoe}(-f_1, f_2, f_3) \cdot e_2 + U_{ooe}(-f_1, f_2, f_3) \cdot e_3 \\
 &\quad - U_{eeo}(-f_1, f_2, f_3) \cdot e_4 + U_{eoo}(-f_1, f_2, f_3) \cdot e_5 \\
 &\quad + U_{eoo}(-f_1, f_2, f_3) \cdot e_6 - U_{ooo}(-f_1, f_2, f_3) \cdot e_7 \\
 &= U_{eee}(f_1, f_2, f_3) \cdot 1 - U_{oee}(f_1, f_2, f_3) \cdot (-e_1) \\
 &\quad - U_{eoe}(f_1, f_2, f_3) \cdot e_2 + U_{ooe}(f_1, f_2, f_3) \cdot (-e_3) \\
 &\quad - U_{eeo}(f_1, f_2, f_3) \cdot e_4 + U_{eoo}(f_1, f_2, f_3) \cdot (-e_5) \\
 &\quad + U_{eoo}(f_1, f_2, f_3) \cdot e_6 - U_{ooo}(f_1, f_2, f_3) \cdot (-e_7).
 \end{aligned}$$

Jak można łatwo zauważyć, zmiana znaku przy zmiennej  $f_1$  spowodowała zmianę znaku dokładnie czterech współczynników stojących przy jednostkach urojonych (to samo stanie się w każdym z pozostałych przypadków). Zauważmy, że złożenie anty-inwolucji  $\alpha_{6,4,2}$  z funkcją  $U(\mathbf{f})$  zmieni znak dokładnie czterech części urojonych, tj. współczynników przy  $e_1, e_3, e_5$  oraz  $e_7$ . Ten sam wynik uzyskamy składając funkcję  $\alpha_{7,5,3,1}$  z funkcją  $U(\mathbf{f})$ . Kończy to dowód równości (7.32).  $\square$

### 7.3. Twierdzenia o przekształceniu afinicznym, modulacji i przesunięciu.

W literaturze można znaleźć szereg własności zespolonej transformacji Fouriera, które mają swoje odpowiedniki zarówno dla transformacji kwaternionowej, jak i oktonionowej [39, 46]. W tej sekcji wykażemy trzy klasyczne twierdzenia, tzn. twierdzenie o przekształceniu afinicznym (nazywane czasem twierdzeniem o podobieństwie) w uproszczonej wersji, twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości (nazywane także twierdzeniem o modulacji) i twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie przestrzeni. Dowód ostatniego twierdzenia dla przypadku funkcji o wartościach rzeczywistych znalazł się również w pracy [16], jednak tutaj przedstawimy jego ogólniejszą wersję oraz poprawiony dowód.

TWIERDZENIE 7.12. *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  i  $U = \mathcal{F}\{u\}$ . Ponadto, niech  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i funkcja  $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  będzie taka, że  $v(x_1, x_2, x_3) = u(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}, \frac{x_3}{c})$ ,  $V = \mathcal{F}\{v\}$ . Wówczas*

$$(7.39) \quad V(f_1, f_2, f_3) = |abc| U(af_1, bf_2, cf_3).$$

DOWÓD. Dowód przebiega w sposób klasyczny i korzysta z Twierdzenia o zamianie zmiennych w całkach wielokrotnych. Z definicji OFT mamy

$$V(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u\left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}, \frac{x_3}{c}\right) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} d\mathbf{x} = (\star).$$

Wprowadźmy nowe zmienne  $(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}, \frac{x_3}{c}\right)$ . Zauważmy, że moduł Jakobianu tego przekształcenia jest równy  $\left|\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)}\right| = |abc|$ . Wówczas

$$\begin{aligned} (\star) &= \int_{\mathbb{R}^3} u(y_1, y_2, y_3) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi a f_1 y_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi b f_2 y_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi c f_3 y_3} |abc| dy \\ &= |abc| U(a f_1, b f_2, c f_3), \end{aligned}$$

co kończy dowód.  $\square$

Twierdzenie 7.12 można sformułować w pełnej ogólności dla dowolnego liniowego przekształcenia zmiennej  $\mathbf{x}$ . W przypadku QFT podobny wynik można znaleźć w [19] dla funkcji  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $v = u(\mathbf{A}\mathbf{x})$ , gdzie  $\mathbf{A}$  jest rzeczywistą macierzą  $2 \times 2$  taką, że  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . Wówczas

$$\begin{aligned} V(f_1, f_2, f_3) &= \frac{1}{2 \det \mathbf{A}} \left( U(\tilde{a}_{22} f_1 + \tilde{a}_{21} f_2, \tilde{a}_{12} f_1 + \tilde{a}_{11} f_2) + U(\tilde{a}_{22} f_1 - \tilde{a}_{21} f_2, -\tilde{a}_{12} f_1 + \tilde{a}_{11} f_2) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{e}_3 U(-\tilde{a}_{22} f_1 + \tilde{a}_{21} f_2, -\tilde{a}_{12} f_1 + \tilde{a}_{11} f_2) + \mathbf{e}_3 U(-\tilde{a}_{22} f_1 - \tilde{a}_{21} f_2, \tilde{a}_{12} f_1 + \tilde{a}_{11} f_2) \right), \end{aligned}$$

gdzie  $\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}$ .

Badając OFT i funkcję  $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{A}\mathbf{x})$ , gdzie  $\mathbf{A}$  jest dowolną rzeczywistą macierzą  $3 \times 3$  taką, że  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  otrzymamy wynik, który zawiera aż 64 składniki. Ze względu na poziom skomplikowania i niewielkie znaczenie dla dalszych rozważań pominiemy zamieszczenie tego wzoru w niniejszej pracy.

W dalszej kolejności udowodnimy serię twierdzeń znanych dla klasycznej transformacji Fouriera jako twierdzenia o modulacji. Warto zaznaczyć, że teza twierdzenia dla modulacji cosinusowej, tzn. gdy sygnałem nośnym jest funkcja cosinus (Twierdzenie 7.13) jest identyczna jak w przypadku CFT, zaś dla modulacji sinusowej (sygnałem nośnym jest sinus, Twierdzenie 7.14) oraz modulacji oktonionową funkcją trygonometryczną (Twierdzenie 7.15) widoczne są znaczne różnice.

**Twierdzenie 7.13.** *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  i  $U = \mathcal{F}\{u\}$ . Ponadto niech  $f_0 \in \mathbb{R}$  i niech  $u^{\cos, i}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \cdot \cos(2\pi f_0 x_i)$ ,  $U^{\cos, i} = \mathcal{F}\{u^{\cos, i}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Wówczas*

$$(7.40) \quad U^{\cos, 1}(f_1, f_2, f_3) = \left( U(f_1 + f_0, f_2, f_3) + U(f_1 - f_0, f_2, f_3) \right) \cdot \frac{1}{2},$$

$$(7.41) \quad U^{\cos, 2}(f_1, f_2, f_3) = \left( U(f_1, f_2 + f_0, f_3) + U(f_1, f_2 - f_0, f_3) \right) \cdot \frac{1}{2},$$

$$(7.42) \quad U^{\cos, 3}(f_1, f_2, f_3) = \left( U(f_1, f_2, f_3 + f_0) + U(f_1, f_2, f_3 - f_0) \right) \cdot \frac{1}{2}.$$



DOWÓD. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy równoważne definicje funkcji trygonometrycznych argumentu rzeczywistego, w szczególności

$$(7.43) \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \left( e^{\mathbf{e}_1 \alpha} + e^{-\mathbf{e}_1 \alpha} \right) = \frac{1}{2} \left( e^{\mathbf{e}_2 \alpha} + e^{-\mathbf{e}_2 \alpha} \right) = \frac{1}{2} \left( e^{\mathbf{e}_4 \alpha} + e^{-\mathbf{e}_4 \alpha} \right).$$

Wówczas dla  $i = 1$  mamy

$$\begin{aligned} U^{\cos,1}(f_1, f_2, f_3) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( u(\mathbf{x}) \cdot \cos(2\pi f_0 x_1) \right) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \cos(2\pi f_0 x_1) \right) e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \left( e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_0 x_1} + e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_0 x_1} \right) \right) e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi (f_1 - f_0) x_1} + e^{-\mathbf{e}_1 2\pi (f_1 + f_0) x_1} \right) e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \left( U(f_1 - f_0, f_2, f_3) + U(f_1 + f_0, f_2, f_3) \right). \end{aligned}$$

Kończy to dowód w tym przypadku. Dla  $i = 2, 3$  własność wykazuje się analogicznie.  $\square$

**Twierdzenie 7.14.** *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  i  $U = \mathcal{F}\{u\}$ . Ponadto niech  $f_0 \in \mathbb{R}$  i niech  $u^{\sin,i}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \cdot \sin(2\pi f_0 x_i)$ ,  $U^{\sin,i} = \mathcal{F}\{u^{\sin,i}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Wówczas*

$$(7.44) \quad U^{\sin,1}(f_1, f_2, f_3) = \left( U(f_1 + f_0, -f_2, -f_3) - U(f_1 - f_0, -f_2, -f_3) \right) \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{2},$$

$$(7.45) \quad U^{\sin,2}(f_1, f_2, f_3) = \left( U(f_1, f_2 + f_0, -f_3) - U(f_1, f_2 - f_0, -f_3) \right) \cdot \frac{\mathbf{e}_2}{2},$$

$$(7.46) \quad U^{\sin,3}(f_1, f_2, f_3) = \left( U(f_1, f_2, f_3 + f_0) - U(f_1, f_2, f_3 - f_0) \right) \cdot \frac{\mathbf{e}_4}{2}.$$

DOWÓD. Dowód tej własności jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 7.13. Wykorzystuje się w nim także definicje funkcji trygonometrycznych argumentu rzeczywistego, w tym przypadku

$$(7.47) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2\mathbf{e}_1} \left( e^{\mathbf{e}_1 \alpha} - e^{-\mathbf{e}_1 \alpha} \right) = \frac{1}{2\mathbf{e}_2} \left( e^{\mathbf{e}_2 \alpha} - e^{-\mathbf{e}_2 \alpha} \right) = \frac{1}{2\mathbf{e}_4} \left( e^{\mathbf{e}_4 \alpha} - e^{-\mathbf{e}_4 \alpha} \right).$$

Wykorzystamy ponadto następujące tożsamości: dla dowolnego  $o \in \mathbb{O}$  i dowolnych  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$(7.48) \quad \left( \left( o \cdot (e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1) \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} = \left( \left( (o \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1}) \cdot e^{\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_4 \alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_1,$$

$$(7.49) \quad \left( (o \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1}) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2) \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} = \left( \left( (o \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_4 \alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_2,$$

$$(7.50) \quad \left( (o \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4) = \left( \left( (o \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_4.$$

Wówczas dla  $i = 1$  mamy

$$\begin{aligned} U^{\sin,1}(f_1, f_2, f_3) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( u(\mathbf{x}) \cdot \sin(2\pi f_0 x_1) \right) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \sin(2\pi f_0 x_1) \right) e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \cdot \mathbf{e}_1 \sin(2\pi f_0 x_1) \cdot \mathbf{e}_1 \right) e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &\stackrel{(7.48)}{=} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} (e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_0 x_1} - e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_0 x_1}) \right) e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \\
 &= - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi (f_1 - f_0) x_1} - e^{-\mathbf{e}_1 2\pi (f_1 + f_0) x_1} \right) e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &= - \frac{1}{2} \left( U(f_1 - f_0, f_2, f_3) - U(f_1 + f_0, f_2, f_3) \right) \cdot \mathbf{e}_1,
 \end{aligned}$$

co kończy to dowód tego przypadku. Dla  $i = 2, 3$  własność wykazuje się analogicznie, wykorzystując równości (7.49) oraz (7.50).  $\square$

**Twierdzenie 7.15.** *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  i  $U = \mathcal{F}\{u\}$ . Ponadto niech  $f_0 \in \mathbb{R}$  i niech  $u^{\text{exp},i}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \cdot \exp(-\mathbf{e}_{2i-1} 2\pi f_0 x_i)$ ,  $U^{\text{exp},i} = \mathcal{F}\{u^{\text{exp},i}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Wówczas*

$$(7.51) \quad U^{\text{exp},1}(f_1, f_2, f_3) = U(f_1 + f_0, f_2, f_3),$$

$$(7.52) \quad \begin{aligned} U^{\text{exp},2}(f_1, f_2, f_3) &= \left( U(f_1, f_2 + f_0, f_3) + U(f_1, f_2 - f_0, f_3) \right. \\ &\quad \left. + U(-f_1, f_2 + f_0, f_3) - U(-f_1, f_2 - f_0, f_3) \right) \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$(7.53) \quad \begin{aligned} U^{\text{exp},3}(f_1, f_2, f_3) &= \left( U(f_1, f_2, f_3 + f_0) + U(f_1, f_2, f_3 - f_0) \right. \\ &\quad \left. + U(-f_1, -f_2, f_3 + f_0) - U(-f_1, -f_2, f_3 - f_0) \right) \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Dowód.** Własności te dowodzi się analogicznie jak Twierdzenie 7.13 i 7.15 – korzystając z równości (7.43) i (7.47). Ponadto wykorzystuje się także poniższe fakty – dla dowolnego  $o \in \mathbb{O}$  oraz dowolnych  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  zachodzi:

$$(7.54) \quad \left( \left( (o \cdot \mathbf{e}_1) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} = \left( \left( o \cdot (e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1) \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3},$$

$$(7.55) \quad \left( \left( (o \cdot \mathbf{e}_2) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} = \left( \left( o \cdot e^{\mathbf{e}_1 \alpha_1} \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2) \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3},$$

$$(7.56) \quad \left( \left( (o \cdot \mathbf{e}_4) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 \alpha_1} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} = \left( \left( o \cdot e^{\mathbf{e}_1 \alpha_1} \right) \cdot e^{\mathbf{e}_2 \alpha_2} \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4 \alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4).$$

Wówczas dla  $i = 3$  mamy

$$\begin{aligned}
 U^{\text{exp},3}(f_1, f_2, f_3) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( u(\mathbf{x}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_0 x_3} \right) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( u(\mathbf{x}) \cdot (\cos(2\pi f_0 x_3) - \mathbf{e}_4 \sin(2\pi f_0 x_3)) \right) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( u(\mathbf{x}) \cdot \cos(2\pi f_0 x_3) \right) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \left( u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_4 \sin(2\pi f_0 x_3) \right) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &\stackrel{(7.56)}{=} \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \left( e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \cdot \cos(2\pi f_0 x_3) \right) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} \left( e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \cdot \mathbf{e}_4 \sin(2\pi f_0 x_3) \right) \, d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left( U(f_1, f_2, f_3 - f_0) + U(f_1, f_2, f_3 + f_0) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left( U(-f_1, -f_2, f_3 - f_0) - U(-f_1, -f_2, f_3 + f_0) \right),
 \end{aligned}$$

co kończy to dowód w tym przypadku. Dla  $i = 1, 2$  własność wykazuje się analogicznie, wykorzystując równości (7.54) oraz (7.55).  $\square$

Ostatnie twierdzenie jakie udowodnimy w tej sekcji, to twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie przestrzeni. Warto przy tym zwrócić uwagę, że jedynie dla przesunięcia na trzeciej zmiennej ( $x_3$ ) teza twierdzenia jest identyczna jak w klasycznym przypadku. Przy przesunięciu na pozostałych zmiennych pojawia się charakterystyczna zmiana znaku zmiennych przy części mnożonej przez jednostkę urojona.

**Twierdzenie 7.16.** *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  i  $U = \mathcal{F}\{u\}$ . Ponadto niech  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  i niech  $u^\alpha(\mathbf{x}) = u(x_1 - \alpha, x_2, x_3)$ ,  $u^\beta(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2 - \beta, x_3)$  i  $u^\gamma(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3 - \gamma)$ ,  $U^\ell = \mathcal{F}\{u^\ell\}$ ,  $\ell = \alpha, \beta, \gamma$ . Wówczas*

$$(7.57) \quad U^\alpha(f_1, f_2, f_3) = \cos(2\pi f_1 \alpha) U(f_1, f_2, f_3) - \sin(2\pi f_1 \alpha) U(f_1, -f_2, -f_3) \cdot \mathbf{e}_1,$$

$$(7.58) \quad U^\beta(f_1, f_2, f_3) = \cos(2\pi f_2 \beta) U(f_1, f_2, f_3) - \sin(2\pi f_2 \beta) U(f_1, f_2, -f_3) \cdot \mathbf{e}_2,$$

$$(7.59) \quad U^\gamma(f_1, f_2, f_3) = \cos(2\pi f_3 \gamma) U(f_1, f_2, f_3) - \sin(2\pi f_3 \gamma) U(f_1, f_2, f_3) \cdot \mathbf{e}_4.$$

**Dowód.** Skorzystamy ponownie z narzędzi użytych w dowodach poprzednich twierdzeń. Rozważmy OFT funkcji  $u^\alpha$ . Z Twierdzenia o zamianie zmiennych w całkach wielokrotnych otrzymamy

$$\begin{aligned}
 U^\alpha(f_1, f_2, f_3) &= \int_{\mathbb{R}^3} u(x_1 - \alpha, x_2, x_3) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} u(x_1, x_2, x_3) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 (x_1 + \alpha)} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) (e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 \alpha}) e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \left( e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} \cdot (\cos(2\pi f_1 \alpha) - \mathbf{e}_1 \sin(2\pi f_1 \alpha)) \right) e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &\stackrel{(7.48)}{=} \cos(2\pi f_1 \alpha) \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \sin(2\pi f_1 \alpha) \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \\
 &= \cos(2\pi f_1 \alpha) U(f_1, f_2, f_3) - \sin(2\pi f_1 \alpha) U(f_1, -f_2, -f_3) \cdot \mathbf{e}_1,
 \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia dla  $u^\alpha$ . Wyprowadzenie równości (7.58) i (7.59) jest analogiczne i korzysta z własności (7.49) oraz (7.50).  $\square$

**7.4. Twierdzenia Parsewala-Plancherela.** Pod koniec Sekcji 7.1 wprowadziliśmy reprezentację OFT funkcji o wartościach rzeczywistych za pomocą sumy składników o różnej parzystości. Pozwoliło to na wykazanie hermitowskiej symetrii OFT, jednak zastosowanie tej reprezentacji jest dużo szersze i posłuży m.in. do wykazania Twierdzeń Plancherela i Rayleigha (nazywanych czasem zbiorczo twierdzeniami Parsewala-Plancherela). Część z tych dowodów (dla funkcji o wartościach rzeczywistych) została zaprezentowana w artykule [16].

Przypomnijmy na początek oryginalne sformułowanie Twierdzenia Plancherela dla klasycznej transformacji Fouriera [39].

**Twierdzenie 7.17.** *Niech  $u, v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  będą funkcjami całkowalnymi w kwadracie (w sensie Lebesgue'a) i niech  $U = \mathcal{F}_{\text{CFT}}\{u\}$ ,  $V = \mathcal{F}_{\text{CFT}}\{v\}$ . Wówczas*

$$(7.60) \quad \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) \cdot \bar{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} U(\mathbf{f}) \cdot \bar{V}(\mathbf{f}) \, d\mathbf{f}.$$

Wprowadźmy też klasyczne oznaczenie

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) \cdot \bar{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

dla dowolnych funkcji całkowalnych w kwadracie (zarówno o wartościach rzeczywistych, zespolonych, jak i oktonionowych). Warto mieć na uwadze, że dla funkcji o wartościach oktonionowych powyższa funkcja nie jest iloczynem skalarnym (ze względu na brak łączności mnożenia nie są spełnione aksjomaty iloczynu skalarnego).

Przypomnijmy, że OFT funkcji o wartościach rzeczywistych może być przedstawiona w postaci

$$U_{\text{OFT}} = U_{eee} - U_{oee}\mathbf{e}_1 - U_{eoe}\mathbf{e}_2 + U_{ooe}\mathbf{e}_3 - U_{eoo}\mathbf{e}_4 + U_{eoo}\mathbf{e}_5 + U_{eoo}\mathbf{e}_6 - U_{ooo}\mathbf{e}_7,$$

gdzie  $U_{xyz}$ ,  $x, y, z \in \{e, o\}$  są zdefiniowane wzorami (7.23)–(7.30). Analogicznie można wyrazić klasyczną transformatę Fouriera [57]:

$$U_{\text{CFT}} = U_{eee} - U_{oee} - U_{eoo} - U_{eoo} + (-U_{oee} - U_{eoe} - U_{eoo} + U_{ooo})\mathbf{e}_1.$$

Powyższe wzory będą podstawą dowodu Twierdzenia Plancherela.

**Lemat 7.18.** *Niech  $u, v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami całkowalnymi w kwadracie (w sensie Lebesgue'a). Wówczas*

$$(7.61) \quad (U_{\text{CFT}}, V_{\text{CFT}}) = (U_{\text{OFT}}, V_{\text{OFT}}).$$

**Dowód.** Przeprowadzając bezpośrednie obliczenia uzyskujemy

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} U_{\text{CFT}}(\mathbf{f}) \cdot \overline{V_{\text{CFT}}(\mathbf{f})} \, d\mathbf{f} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( U_{eee}V_{eee} + U_{oee}V_{oee} + U_{eoe}V_{eoe} + U_{ooe}V_{ooe} \right. \\ & \quad \left. + U_{eoo}V_{eoo} + U_{eoo}V_{eoo} + U_{eoo}V_{eoo} + U_{ooo}V_{ooo} \right) d\mathbf{f}. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy w obliczeniach fakt, że pozostałe składniki powstałe w wyniku mnożenia  $U_{\text{CFT}}(\mathbf{f}) \cdot \overline{V_{\text{CFT}}(\mathbf{f})}$  są nieparzyste ze względu na przynajmniej jedną zmienną, zatem ich całka po  $\mathbb{R}^3$  znika. Ten sam wynik uzyskamy dla prawej strony równości (7.61):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) \cdot \overline{V_{\text{OFT}}(\mathbf{f})} \, d\mathbf{f} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( U_{eee}V_{eee} + U_{oee}V_{oee} + U_{eoe}V_{eoe} + U_{ooe}V_{ooe} \right. \\ & \quad \left. + U_{eoo}V_{eoo} + U_{oee}V_{oee} + U_{eoo}V_{eoo} + U_{ooo}V_{ooo} \right) \, d\mathbf{f}. \end{aligned}$$

Kończy to dowód lematu. □

Lemat 7.18 i Twierdzenie 7.17 prowadzą bezpośrednio do Twierdzenia Plancherela (Twierdzenie 7.19) dla oktonionowej transformacji Fouriera.

**Twierdzenie 7.19.** *Niech  $u, v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami całkowalnymi w kwadracie (w sensie Lebesgue'a). Wówczas*

$$(7.62) \quad (u, v) = (U_{\text{OFT}}, V_{\text{OFT}}).$$

Założenie o tym, że funkcje mają mieć wartości rzeczywiste, jest istotne. Dla funkcji o wartościach oktonionowych teza Twierdzenia 7.19 nie zachodzi, co szczegółowo omówimy w Uwadze 7.22. Dla funkcji o wartościach rzeczywistych bezpośrednim wnioskiem z powyższego twierdzenia jest Twierdzenie Rayleigha (Twierdzenie 7.20), znane również dla klasycznej transformacji Fouriera. Wykażemy jednak to twierdzenie w pełnej ogólności, dla funkcji o wartościach oktonionowych.

**Twierdzenie 7.20.** *Norma  $L^2$  dowolnej funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  całkowalnej w kwadracie (w sensie Lebesgue'a) jest równa normie  $L^2$  jej oktonionowej transformaty Fouriera, tzn.*

$$(7.63) \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|U_{\text{OFT}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

gdzie  $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \left( \int_{\mathbb{R}^3} |v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}$  dla funkcji  $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  całkowalnej w kwadracie.

**Dowód.** W przypadku funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dowód wynika bezpośrednio z Twierdzenia 7.19 dla  $v = \bar{u} = u$ .

Aby udowodnić równość (7.63) dla funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$ , wróćmy do początkowych rozważań na temat OFT. Każdą funkcję  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$  można zapisać jako

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + \dots + u_7(\mathbf{x})\mathbf{e}_7,$$

gdzie  $u_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, 7$ , są funkcjami o wartościach rzeczywistych.

Wówczas, korzystając z następujących własności

$$\begin{aligned} & \left( (\mathbf{e}_1 \cdot e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_1, \\ & \left( (\mathbf{e}_2 \cdot e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} = \left( (e^{\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ((\mathbf{e}_3 \cdot e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} &= ((e^{\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{\mathbf{e}_4\alpha_3}) \cdot \mathbf{e}_3, \\
 ((\mathbf{e}_4 \cdot e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} &= ((e^{\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3}) \cdot \mathbf{e}_4, \\
 ((\mathbf{e}_5 \cdot e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} &= ((e^{\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{\mathbf{e}_4\alpha_3}) \cdot \mathbf{e}_5, \\
 ((\mathbf{e}_6 \cdot e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} &= ((e^{\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{\mathbf{e}_4\alpha_3}) \cdot \mathbf{e}_6, \\
 ((\mathbf{e}_7 \cdot e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1}) \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} &= ((e^{\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{\mathbf{e}_4\alpha_3}) \cdot \mathbf{e}_7,
 \end{aligned}$$

możemy zapisać

$$\begin{aligned}
 U_{\text{OFT}}(f_1, f_2, f_3) &= U^0(f_1, f_2, f_3) + U^1(f_1, -f_2, -f_3)\mathbf{e}_1 \\
 &\quad + U^2(-f_1, f_2, -f_3)\mathbf{e}_2 + U^3(-f_1, -f_2, -f_3)\mathbf{e}_3 \\
 &\quad + U^4(-f_1, -f_2, f_3)\mathbf{e}_4 + U^5(-f_1, -f_2, -f_3)\mathbf{e}_5 \\
 &\quad + U^6(-f_1, -f_2, -f_3)\mathbf{e}_6 + U^7(-f_1, -f_2, -f_3)\mathbf{e}_7,
 \end{aligned}$$

gdzie  $U^i = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_i\}$ ,  $i = 0, \dots, 7$  są transformacjami Fouriera funkcji o wartościach rzeczywistych. Każdą z tych funkcji można zatem wyrazić jako sumę składników o różnej parzystości:

$$U^i = U_{eee} - U_{oee}^i\mathbf{e}_1 - U_{eoe}^i\mathbf{e}_2 + U_{ooe}^i\mathbf{e}_3 - U_{eeo}^i\mathbf{e}_4 + U_{oeo}^i\mathbf{e}_5 + U_{eoo}^i\mathbf{e}_6 - U_{ooo}^i\mathbf{e}_7, \quad i = 0, \dots, 7.$$

Zauważmy, że z pierwszej części dowodu wynika, że

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \sum_{i=0}^7 \|u_i\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \sum_{i=0}^7 \|U^i\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Wystarczy zatem pokazać, że

$$(7.64) \quad \|U_{\text{OFT}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \sum_{i=0}^7 \|U^i\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Zauważmy, że część rzeczywista oraz każda część urojona funkcji  $U_{\text{OFT}}$  będzie zawierała dokładnie po jednej funkcji z rozkładu każdej  $U^i$  na składowe o różnej parzystości, np.

$$\text{Re}(U_{\text{OFT}}) = U_{eee}^0 + U_{oee}^1 + U_{eoe}^2 - U_{ooe}^3 + U_{eeo}^4 - U_{oeo}^5 - U_{eoo}^6 + U_{ooo}^7,$$

gdzie każda ze składowych jest wzięta w odpowiednim argumentcie. Co więcej, każda ze składowych będzie miała inny charakter parzystości. Prowadzi to do następującego wniosku

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} (\text{Re}(U_{\text{OFT}}))^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( (U_{eee}^0)^2 + (U_{oee}^1)^2 + (U_{eoe}^2)^2 + (U_{ooe}^3)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (U_{eeo}^4)^2 + (U_{oeo}^5)^2 + (U_{eoo}^6)^2 + (U_{ooo}^7)^2 \right) d\mathbf{f},
 \end{aligned}$$

co wynika z faktu, że pozostałe składniki powstałe w wyniku podnoszenia do kwadratu funkcji  $\text{Re}(U_{\text{OFT}})$  są nieparzyste ze względu na przynajmniej jedną zmienną. Analogiczny wynik otrzymamy dla każdej części urojonej funkcji  $U_{\text{OFT}}$ . Sumując wszystkie całki

i odpowiednio je grupując otrzymamy

$$\int_{\mathbb{R}^3} |U_{\text{OFT}}|^2 dx = \sum_{i=0}^7 \int_{\mathbb{R}^3} \left( (U_{eee}^i)^2 + (U_{oee}^i)^2 + (U_{eoe}^i)^2 + (U_{ooe}^i)^2 \right. \\ \left. + (U_{eoo}^i)^2 + (U_{oeo}^i)^2 + (U_{eoo}^i)^2 + (U_{ooo}^i)^2 \right) d\mathbf{f} = \sum_{i=0}^7 \|U^i\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

**WNIOSEK 7.21.** *Energia sygnału o wartościach oktonionowych jest zachowywana przez jego widmo oktonionowe.*

**UWAGA 7.22.** O ile teza Twierdzenia 7.20 jest prawdziwa dla funkcji o wartościach oktonionowych, to Twierdzenie 7.19 zachodzi w ogólności jedynie dla funkcji o wartościach rzeczywistych. Rozważmy następujące dwa przykłady.

Weźmy dwie funkcje

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 \right) \right\}, \\ v(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{e}_1}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 \right) \right\}.$$

Zauważmy, że oktonionowe transformaty Fouriera tych funkcji są równe

$$U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = \exp \left\{ -2\pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\} \cdot (c_1 c_3 - s_1 c_3 \mathbf{e}_1 - c_1 s_3 \mathbf{e}_4 + s_1 s_3 \mathbf{e}_5), \\ V_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = \exp \left\{ -2\pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\} \cdot (c_1 c_3 - s_1 c_3 \mathbf{e}_1 - c_1 s_3 \mathbf{e}_4 + s_1 s_3 \mathbf{e}_5) \cdot \mathbf{e}_1 \\ = \exp \left\{ -2\pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\} \cdot (s_1 c_3 + c_1 c_3 \mathbf{e}_1 + s_1 s_3 \mathbf{e}_4 + c_1 s_3 \mathbf{e}_5),$$

gdzie  $c_j = \cos(2\pi f_j)$  i  $s_j = \sin(2\pi f_j)$ ,  $j = 1, 3$ . Wówczas

$$\int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \cdot \bar{v}(\mathbf{x}) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{e}_1}{(2\pi)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( 2(x_1 - 1)^2 + 2x_2^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_3 + 1)^2 \right) \right\} dx \\ = - \frac{\mathbf{e}_1}{8e\pi^{3/2}}.$$

Z drugiej strony

$$\int_{\mathbb{R}^3} U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) \cdot \overline{V_{\text{OFT}}(\mathbf{f})} d\mathbf{f} = \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -4\pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\} \\ \cdot (c_1 c_3 - s_1 c_3 \mathbf{e}_1 - c_1 s_3 \mathbf{e}_4 + s_1 s_3 \mathbf{e}_5) \\ \cdot (s_1 c_3 + c_1 c_3 \mathbf{e}_1 + s_1 s_3 \mathbf{e}_4 + c_1 s_3 \mathbf{e}_5) d\mathbf{f} \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -4\pi^2 \|\mathbf{f}\|_2^2 \right\} \cdot (-c_1^2 c_3^2 - s_1^2 c_3^2 + c_1^2 s_3^2 + s_1^2 s_3^2) d\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_1 \\ = - \frac{\mathbf{e}_1}{8e\pi^{3/2}},$$

gdzie skorzystano z faktu, że całki z funkcji nieparzystych są równe zero. Otrzymaliśmy zatem równość z tezy Twierdzenia 7.19.

Jeśli rozważymy funkcje

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 \right) \right\},$$

$$v(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{e}_1}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( x_1^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 1)^2 \right) \right\},$$

których transformaty są równe

$$U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = \exp \left\{ -2\pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\} \cdot (c_2 c_3 - s_2 c_3 \mathbf{e}_2 - c_2 s_3 \mathbf{e}_4 + s_2 s_3 \mathbf{e}_5),$$

$$V_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = \exp \left\{ -2\pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\} \cdot (c_2 c_3 - s_2 c_3 \mathbf{e}_2 - c_2 s_3 \mathbf{e}_4 + s_2 s_3 \mathbf{e}_5) \cdot \mathbf{e}_1$$

$$= \exp \left\{ -2\pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\} \cdot (c_2 c_3 \mathbf{e}_1 + s_2 c_3 \mathbf{e}_3 + c_2 s_3 \mathbf{e}_5 + s_2 s_3 \mathbf{e}_7),$$

to wówczas ponownie

$$\int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \cdot \bar{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{e}_1}{(2\pi)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( 2x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. + (x_3 - 1)^2 + (x_3 + 1)^2 \right) \right\} \, d\mathbf{x}$$

$$= - \frac{\mathbf{e}_1}{8e^2 \pi^{3/2}},$$

ale z drugiej strony

$$\int_{\mathbb{R}^3} U_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) \cdot \overline{V_{\text{OFT}}(\mathbf{f})} \, d\mathbf{f} = \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -4\pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\}$$

$$\cdot (c_2 c_3 - s_2 c_3 \mathbf{e}_2 - c_2 s_3 \mathbf{e}_4 + s_2 s_3 \mathbf{e}_5)$$

$$\cdot (c_2 c_3 \mathbf{e}_1 + s_2 c_3 \mathbf{e}_3 + c_2 s_3 \mathbf{e}_5 + s_2 s_3 \mathbf{e}_7) \, d\mathbf{f}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -4\pi^2 \|\mathbf{f}\|_2^2 \right\} \cdot (-c_2^2 c_3^2 + s_2^2 c_3^2 + c_2^2 s_3^2 + s_2^2 s_3^2) \, d\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_1$$

$$= - \frac{\mathbf{e}_1}{8e^2 \pi^{3/2}} \cdot \left( \frac{1}{2} + e + \frac{e^2}{2} \right).$$

Przykład ten dowodzi, że w ogólności teza Twierdzenia 7.19 nie zachodzi dla dowolnych funkcji  $u, v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{O}$ .

**7.5. Funkcja autokorelacji.** Ostatnim aspektem oktonionowej transformacji Fouriera, którym zajmiemy się w tej sekcji, jest pojęcie funkcji autokorelacji oraz widma gęstości energii. Ze względu na to, że twierdzenia o hermitowskiej symetrii są prawdziwe tylko dla funkcji o wartościach rzeczywistych, ograniczymy do nich dalsze rozważania.

Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną z kwadratem. Klasyczną funkcję autokorelacji sygnału  $u$  definiuje się jako

$$R_u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \bar{u}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  oraz  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Oczywiście dla funkcji o wartościach rzeczywistych mamy  $\bar{u} = u$ .



Wiemy z klasycznej teorii, że zachodzi następujący fakt (nazywany również Twierdzeniem Wienera-Chinczyna lub Twierdzeniem o funkcji autokorelacji) [92]:

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}} \{R_u\}(\mathbf{f}) = |U_{\text{CFT}}(\mathbf{f})|^2,$$

a zatem również

$$R_u(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_{\text{CFT}}^{-1} \{ |U_{\text{CFT}}(\cdot)|^2 \}(\boldsymbol{\xi}).$$

Funkcję  $S_u(\mathbf{f}) := |U_{\text{CFT}}(\mathbf{f})|^2$  nazywamy *widmem gęstości energii*. Zauważmy ponadto, że jest to funkcja o wartościach rzeczywistych i parzysta względem kompleksu zmiennych  $\mathbf{f}$ . Wobec tego

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}}^{-1} \{S_u\}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u\}(\boldsymbol{\xi}).$$

Wprowadźmy teraz zmodyfikowane pojęcie widma gęstości energii, korzystające z oktonionowej transformaty Fouriera.

**DEFINICJA 7.23.** Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną z kwadratem. *Oktonionowym widmem gęstości energii* nazywamy funkcję  $S_{\text{OFT},u}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  daną wzorem

$$S_{\text{OFT},u}(\mathbf{f}) = |U_{\text{OFT}}(\mathbf{f})|^2.$$

Klasyczne pojęcie widma gęstości energii oraz jego oktonionowy odpowiednik są ze sobą powiązane, o czym mówi poniższe twierdzenie.

**TWIERDZENIE 7.24.** Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną z kwadratem. Zachodzi wówczas wzór

$$(7.65) \quad S_{\text{OFT},u}(\mathbf{f}) = \frac{1}{4} \left( S_u(f_1, f_2, f_3) + S_u(-f_1, f_2, f_3) \right. \\ \left. + S_u(f_1, -f_2, f_3) + S_u(f_1, f_2, -f_3) \right).$$

Ponadto funkcja  $S_{\text{OFT},u}$  jest parzysta ze względu na każdą ze zmiennych.

**DOWÓD.** Z rozważań w poprzedniej sekcji wynika, że zachodzi następująca równość

$$S_u = (U_{eee} - U_{ooe} - U_{oeo} - U_{eoo})^2 + (-U_{oee} - U_{eoe} - U_{eoo} + U_{ooo})^2,$$

gdzie  $U_{xyz}$ ,  $x, y, z \in \{e, o\}$ , są składnikami widma o różnej parzystości, danymi wzorami (7.23)–(7.30). Stąd

$$(7.66) \quad S_u = U_{eee}^2 + U_{ooe}^2 + U_{oeo}^2 + U_{eoo}^2 + U_{oee}^2 + U_{eoe}^2 + U_{eoo}^2 + U_{ooo}^2 \\ - 2U_{eee}U_{ooe} + 2U_{oeo}U_{eoo} + 2U_{oee}U_{eoe} - 2U_{eoo}U_{ooo} \\ - 2U_{eee}U_{oeo} + 2U_{ooe}U_{eoo} + 2U_{oee}U_{eoo} - 2U_{eoe}U_{ooo} \\ - 2U_{eee}U_{eoo} + 2U_{ooe}U_{oeo} - 2U_{oee}U_{ooo} + 2U_{eoe}U_{eoo}.$$

Zauważmy, że można wobec tego napisać

$$S_u = S_{u,eee} + S_{u,ooe} + S_{u,oeo} + S_{u,ooo}$$

i kolejne składowe odpowiadają kolejnym liniom w równości (7.66). Tak jak do tej pory indeksy w funkcji  $S_u$  oznaczają parzystość względem zmiennych. Ponadto

$$\begin{aligned} S_u(f_1, f_2, f_3) &= S_{u,eee}(\mathbf{f}) + S_{u,ooe}(\mathbf{f}) + S_{u,oeo}(\mathbf{f}) + S_{u,ooo}(\mathbf{f}), \\ S_u(-f_1, f_2, f_3) &= S_{u,eee}(\mathbf{f}) - S_{u,ooe}(\mathbf{f}) - S_{u,oeo}(\mathbf{f}) + S_{u,ooo}(\mathbf{f}), \\ S_u(f_1, -f_2, f_3) &= S_{u,eee}(\mathbf{f}) - S_{u,ooe}(\mathbf{f}) + S_{u,oeo}(\mathbf{f}) - S_{u,ooo}(\mathbf{f}), \\ S_u(f_1, f_2, -f_3) &= S_{u,eee}(\mathbf{f}) + S_{u,ooe}(\mathbf{f}) - S_{u,oeo}(\mathbf{f}) - S_{u,ooo}(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe równości oraz zauważając, że

$$(7.67) \quad S_{\text{OFT},u} = U_{eee}^2 + U_{ooe}^2 + U_{oeo}^2 + U_{ooo}^2 + U_{oee}^2 + U_{eoe}^2 + U_{eoo}^2 + U_{ooo}^2 = S_{u,eee},$$

otrzymujemy równość (7.65). Druga część tezy wynika wprost z równości (7.67).  $\square$

Korzystając z powyższego twierdzenia (parzystości oktonionowego widma gęstości energii) otrzymujemy natychmiast, że

$$\mathcal{F}_{\text{OFT}}^{-1} \{S_{\text{OFT},u}\} = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{S_{\text{OFT},u}\} = \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_{\text{OFT},u}\},$$

a stąd

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{OFT}}^{-1} \{S_{\text{OFT},u}\}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4} \left( \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u(\cdot, \cdot, \cdot)\}(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u(-\cdot, \cdot, \cdot)\}(\boldsymbol{\xi}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u(\cdot, -\cdot, \cdot)\}(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u(\cdot, \cdot, -\cdot)\}(\boldsymbol{\xi}) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u\}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u\}(-\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u\}(\xi_1, -\xi_2, \xi_3) + \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{S_u\}(\xi_1, \xi_2, -\xi_3) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( R_u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + R_u(-\xi_1, \xi_2, \xi_3) + R_u(\xi_1, -\xi_2, \xi_3) + R_u(\xi_1, \xi_2, -\xi_3) \right). \end{aligned}$$

DEFINICJA 7.25. Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną z kwadratem. *Rozszerzoną funkcją autokorelacji* sygnału  $u$  nazywamy funkcję

$$\begin{aligned} R_{\text{OFT},u}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} u(x_1, x_2, x_3) \cdot \left( u(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) + u(x_1 + \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) \right. \\ &\quad \left. + u(x_1 - \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 - \xi_3) + u(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 + \xi_3) \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Natychmiastowym wnioskiem z rozważań w tej sekcji jest poniższe twierdzenie, które jest oktonionowym odpowiednikiem Twierdzenia Wienera-Chinczyna.

**Twierdzenie 7.26.** *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną z kwadratem. Wówczas wielowymiarowa funkcja autokorelacji sygnału  $u$  oraz oktonionowe widmo gęstości energii sygnału  $u$  tworzą parę oktonionowych transformat Fouriera, tzn.*

$$(7.68) \quad S_{\text{OFT},u}(\mathbf{f}) = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{R_{\text{OFT},u}\}(\mathbf{f}), \quad R_{\text{OFT},u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_{\text{OFT}}^{-1} \{S_{\text{OFT},u}\}(\boldsymbol{\xi}).$$

Z Twierdzenia 7.26 można wyciągnąć natychmiastowy wniosek – ponieważ funkcja  $S_{\text{OFT},u}$  ma wartości rzeczywiste i jest parzysta względem każdej zmiennej, funkcja  $R_{\text{OFT},u}$  również jest funkcją parzystą względem każdej zmiennej, a wzory (7.68) można zapisać w postaci

$$S_{\text{OFT},u}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} R_{\text{OFT},u}(\boldsymbol{\xi}) \cos(2\pi f_1 \xi_1) \cos(2\pi f_2 \xi_2) \cos(2\pi f_3 \xi_3) d\boldsymbol{\xi},$$

$$R_{\text{OFT},u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^3} S_{\text{OFT},u}(\mathbf{f}) \cos(2\pi f_1 \xi_1) \cos(2\pi f_2 \xi_2) \cos(2\pi f_3 \xi_3) d\mathbf{f}.$$

Warto zastanowić się również jaki związek ma „nowa” funkcja autokorelacji z tą zdefiniowaną w sposób klasyczny. Okazuje się, że dla pewnych klas funkcji obie definicje są tożsame. Skorzystamy tutaj z rozkładu dowolnej funkcji  $u$  na składowe o różnej parzystości, tzn.

$$u = u_{eee} + u_{oee} + u_{eoe} + u_{ooe} + u_{eoo} + u_{oeo} + u_{eoo} + u_{ooo},$$

gdzie poszczególne składniki  $u_{xyz}$  są dane wzorem (7.31).

**Twierdzenie 7.27.** *Niech funkcja  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie całkowalna z kwadratem. Jeśli funkcja  $u$  jest*

(a) *parzysta względem kompleksu zmiennych  $\mathbf{x}$ , tzn.  $u(-\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ , to*

$$R_{\text{OFT},u} = R_{ueee} + R_{uooe} + R_{uoeo} + R_{ueoo};$$

(b) *nieparzysta względem kompleksu zmiennych  $\mathbf{x}$ , tzn.  $u(-\mathbf{x}) = -u(\mathbf{x})$ , to*

$$R_{\text{OFT},u} = R_{uoee} + R_{ueoe} + R_{ueeo} + R_{uooo};$$

(c) *parzysta lub nieparzysta względem każdej zmiennej, tzn.  $u = u_{xyz}$  dla pewnych  $x, y, z \in \{e, o\}$ , to*

$$R_{\text{OFT},u} = R_u.$$

**Dowód.** Niech  $u = u_{xyz}$  dla pewnej trójki  $x, y, z \in \{e, o\}$ . Zauważmy najpierw, że dla dowolnych  $x, y, z \in \{e, o\}$  zachodzi  $S_{\text{OFT},u_{xyz}} = U_{xyz}^2 = S_{u_{xyz}}$  i jest to funkcja parzysta względem każdej ze zmiennych. Wobec tego

$$R_{\text{OFT},u_{xyz}} = \mathcal{F}_{\text{OFT}}^{-1} \{S_{\text{OFT},u_{xyz}}\} = \mathcal{F}_{\text{CFT}}^{-1} \{S_{\text{OFT},u_{xyz}}\} = \mathcal{F}_{\text{CFT}}^{-1} \{S_{u_{xyz}}\} = R_{u_{xyz}}.$$

Kończy to dowód części (c) twierdzenia.

Niech teraz funkcja  $u$  będzie parzysta względem kompleksu zmiennych  $\mathbf{x}$ . Wówczas, korzystając ze wzoru (7.31), otrzymujemy, że

$$u_{oee} \equiv u_{eoe} \equiv u_{eoo} \equiv u_{ooo} \equiv 0,$$

zatem  $u = u_{eee} + u_{ooe} + u_{oeo} + u_{eoo}$  oraz

$$S_{\text{OFT},u} = U_{eee}^2 + U_{ooe}^2 + U_{oeo}^2 + U_{eoo}^2 = S_{\text{OFT},u_{eee}} + S_{\text{OFT},u_{ooe}} + S_{\text{OFT},u_{oeo}} + S_{\text{OFT},u_{eoo}}.$$

Z liniowości OFT funkcji o wartościach rzeczywistych oraz poprzedniej części dowodu otrzymujemy tezę punktu (a). Dowód punktu (b) jest analogiczny i wynika z tego, że

$$u_{eee} \equiv u_{ooe} \equiv u_{oeo} \equiv u_{eoo} \equiv 0$$

dla funkcji nieparzystej względem kompleksu zmiennych  $\mathbf{x}$ .  $\square$

Rozszerzona funkcja autokorelacji ma w ogólności takie same własności co klasyczna funkcja autokorelacji. W szczególności zachodzą poniższe fakty. Twierdzenia 7.28–7.31 pozostawiamy bez dowodu.

**TWIERDZENIE 7.28.** *Rozszerzona funkcja autokorelacji funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (całkowalnej z kwadratem) jest funkcją parzystą względem każdej zmiennej.*

**TWIERDZENIE 7.29.** *Dla funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (całkowalnej z kwadratem) zachodzi*

$$R_{\text{OFT},u}(\mathbf{0}) = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

**TWIERDZENIE 7.30.** *Dla funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (całkowalnej z kwadratem) zachodzi*

$$\int_{\mathbb{R}^3} R_{\text{OFT},u}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} = \left( \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right)^2.$$

**TWIERDZENIE 7.31.** *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną z kwadratem, niech  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$  i niech  $u^\alpha(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})$ . Wówczas*

$$R_{\text{OFT},u^\alpha} = R_{\text{OFT},u}.$$

**TWIERDZENIE 7.32.** *Dla funkcji  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (całkowalnej z kwadratem) zachodzi*

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 \quad |R_{\text{OFT},u}(\boldsymbol{\xi})| \leq R_{\text{OFT},u}(\mathbf{0}).$$

**DOWÓD.** Teza wynika z analogicznej własności dla klasycznej funkcji autokorelacji. Niech  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ , wówczas z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned} |R_{\text{OFT},u}(\boldsymbol{\xi})|^2 &= \left| \frac{1}{4} \left( R_u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + R_u(-\xi_1, \xi_2, \xi_3) + R_u(\xi_1, -\xi_2, \xi_3) + R_u(\xi_1, \xi_2, -\xi_3) \right) \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left( |R_u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)|^2 + |R_u(-\xi_1, \xi_2, \xi_3)|^2 + |R_u(\xi_1, -\xi_2, \xi_3)|^2 + |R_u(\xi_1, \xi_2, -\xi_3)|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left( |R_u(\mathbf{0})|^2 + |R_u(\mathbf{0})|^2 + |R_u(\mathbf{0})|^2 + |R_u(\mathbf{0})|^2 \right) = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4 = R_{\text{OFT},u}^2(\mathbf{0}), \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

## 8. OFT w analizie systemów 3D

Oktonionowa transformacja Fouriera omówiona w poprzedniej sekcji może się wydawać dość abstrakcyjnym narzędziem. Omówione w Sekcji 6 zastosowania algebr hiperzespolonych w teorii sygnałów ograniczały się głównie do algebry kwaternionów. Oktoniony znalazły zastosowanie przede wszystkim w fizyce kwantowej i do tej pory nie były wykorzystywane w analizie systemów. W tej sekcji postaramy się pokazać możliwości zastosowania OFT w analizie liniowych systemów stacjonarnych 3D (tzn. trzech zmiennych) oraz rozwiązywaniu liniowych równań różniczkowych cząstkowych oraz różnicowych o stałych współczynnikach.

W pierwszej części wykażemy kolejne własności OFT istotne z punktu widzenia wspomnianych zastosowań, tj. twierdzenie o transformatach pochodnych cząstkowych funkcji trzech zmiennych oraz oktonionowy odpowiednik twierdzenia o dualności splotu i mnożenia. Następnie zdefiniujemy nową algebrę ósmego rzędu nad ciałem liczb rzeczywistych, która, w przeciwieństwie do oktonionów, będzie przemieniana i łączna. Wykorzystując te narzędzia zdefiniujemy oktonionową charakterystykę częstotliwościową systemu i pokażemy jej własności. Na koniec przeprowadzimy analizę pewnych równań różniczkowych cząstkowych oraz różnicowych o stałych współczynnikach. Uogólnimy wyniki znane dla systemów 1D, równań różniczkowych zwyczajnych oraz klasycznych równań różnicowych. Zdefiniujemy również dyskretny odpowiednik oktonionowej transformacji Fouriera.

Inspiracją dla tych rozważań były m.in. prace [19, 44, 46], w których sformułowano analogiczne wyniki dla systemów 2D i pokazano zalety wykorzystania transformacji kwaternionowej w miejsce transformaty klasycznej. Podobnie jak poprzednia sekcja, Sekcja 8 jest w pełni autorska i powstała w ramach prac prowadzonych w Pracowni Sygnałów i Sieci Radiokomunikacyjnych. Wyniki te nie były do tej pory publikowane.

**8.1. Twierdzenie o transformacie pochodnych cząstkowych.** Będziemy rozważać jedynie funkcje trzech zmiennych o wartościach rzeczywistych  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Będziemy zakładać, że funkcja  $u$  jest bezwzględnie całkowalna (a więc istnieje jej OFT) oraz gładka (tzn. różniczkowalna odpowiednią liczbę razy) i jej pochodne mają dobrze określone oktonionowe transformaty Fouriera.

Rozważmy pochodną funkcji  $u$  po zmiennej  $x_1$ , oznaczoną jako  $u_{x_1}$ , i jej transformatę oktonionową  $U^{\partial x_1}$ . Ponieważ jest to funkcja o wartościach rzeczywistych to możemy zapisać

$$U^{\partial x_1} = U_{eee}^{\partial x_1} - U_{oee}^{\partial x_1} \mathbf{e}_1 - U_{eoe}^{\partial x_1} \mathbf{e}_2 + U_{ooe}^{\partial x_1} \mathbf{e}_3 - U_{eoo}^{\partial x_1} \mathbf{e}_4 + U_{oeo}^{\partial x_1} \mathbf{e}_5 + U_{eoo}^{\partial x_1} \mathbf{e}_6 - U_{ooo}^{\partial x_1} \mathbf{e}_7,$$

gdzie, analogicznie jak w przypadku funkcji  $u$ ,

$$(8.1) \quad U_{eee}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_1}(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(8.2) \quad U_{oee}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_1}(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(8.3) \quad U_{eoe}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_1}(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(8.4) \quad U_{ooe}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_1}(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(8.5) \quad U_{eoo}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_1}(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(8.6) \quad U_{oeo}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_1}(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(8.7) \quad U_{eoo}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_1}(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

$$(8.8) \quad U_{ooo}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_1}(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Zauważmy, że nie musimy rozpisywać funkcji  $u_{x_1}$  na składniki o różnej parzystości, jak zrobiliśmy to w przypadku funkcji  $u$  i wzorów (7.23)–(7.30). Wzory te pozostają prawdziwe również wtedy, gdy zastąpimy funkcje  $u_{xyz}$ ,  $x, y, z \in \{e, o\}$ , funkcją  $u$ .

Zastosujemy w powyższych wzorach całkowanie przez części. Korzystając z faktu, że z gładkości i bezwzględnej całkowalności funkcji  $u$  wynika, że dla każdego  $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  zachodzi  $\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} u(\mathbf{x}) = 0$ , otrzymujemy

$$U_{eee}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x} \cdot 2\pi f_1 = U_{oee}(\mathbf{f}) \cdot 2\pi f_1,$$

$$U_{oee}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = - \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x} \cdot 2\pi f_1 = -U_{eee}(\mathbf{f}) \cdot 2\pi f_1,$$

$$U_{eoe}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x} \cdot 2\pi f_1 = U_{ooe}(\mathbf{f}) \cdot 2\pi f_1,$$

$$U_{ooe}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = - \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \cos(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x} \cdot 2\pi f_1 = -U_{eoe}(\mathbf{f}) \cdot 2\pi f_1,$$

$$U_{eoo}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x} \cdot 2\pi f_1 = U_{oee}(\mathbf{f}) \cdot 2\pi f_1,$$

$$U_{oee}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = - \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \cos(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x} \cdot 2\pi f_1 = -U_{eoo}(\mathbf{f}) \cdot 2\pi f_1,$$

$$U_{eoo}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \sin(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x} \cdot 2\pi f_1 = U_{ooo}(\mathbf{f}) \cdot 2\pi f_1,$$

$$U_{ooo}^{\partial x_1}(\mathbf{f}) = - \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}) \cos(2\pi f_1 x_1) \sin(2\pi f_2 x_2) \sin(2\pi f_3 x_3) \, d\mathbf{x} \cdot 2\pi f_1 = -U_{ooo}(\mathbf{f}) \cdot 2\pi f_1,$$

a zatem

$$\begin{aligned} U^{\partial x_1} &= \left( U_{oee} + U_{eee}\mathbf{e}_1 - U_{ooe}\mathbf{e}_2 - U_{eoe}\mathbf{e}_3 - U_{oee}\mathbf{e}_4 - U_{eoo}\mathbf{e}_5 + U_{ooo}\mathbf{e}_6 + U_{eoo}\mathbf{e}_7 \right) \cdot 2\pi f_1 \\ &= \left( U_{eee} - U_{oee}\mathbf{e}_1 + U_{eoe}\mathbf{e}_2 - U_{ooe}\mathbf{e}_3 + U_{eoo}\mathbf{e}_4 - U_{oee}\mathbf{e}_5 + U_{eoo}\mathbf{e}_6 - U_{ooo}\mathbf{e}_7 \right) \cdot (2\pi f_1 \mathbf{e}_1) \\ &= \alpha_{5,4,3,2}(U) \cdot (2\pi f_1 \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowania dla pochodnych po zmiennych  $x_2$  oraz  $x_3$  i korzystając z Twierdzenia 7.9 (o hermitowskiej symetrii) otrzymujemy poniższy wynik.

TWIERDZENIE 8.1. *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$ . Wówczas*

$$(8.9) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1}\}(f_1, f_2, f_3) = U(f_1, -f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_1 \mathbf{e}_1),$$

$$(8.10) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_2}\}(f_1, f_2, f_3) = U(f_1, f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_2 \mathbf{e}_2),$$

$$(8.11) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_3}\}(f_1, f_2, f_3) = U(f_1, f_2, f_3) \cdot (2\pi f_3 \mathbf{e}_3).$$

Zauważmy, że teza powyższego twierdzenia jest analogiczna do tezy klasycznej wersji twierdzenia o transformacie Fouriera pochodnej. Różnicą jest przede wszystkim rodzaj jednostki urojonej, przez którą mnożona jest transformata Fouriera oraz pojawiająca się zmiana znaku przy niektórych zmiennych. Jest to charakterystyczna cecha oktonionowej transformacji Fouriera.

Z Twierdzenia 8.1 można wyciągnąć następujący wniosek dla mieszanych pochodnych cząstkowych wyższych rzędów.

WNIOSEK 8.2. *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$ . Wówczas*

$$(8.12) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1 x_2}\}(f_1, f_2, f_3) = U(-f_1, -f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_1)(2\pi f_2) \mathbf{e}_3,$$

$$(8.13) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1 x_3}\}(f_1, f_2, f_3) = U(-f_1, f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_1)(2\pi f_3) \mathbf{e}_5,$$

$$(8.14) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_2 x_3}\}(f_1, f_2, f_3) = U(-f_1, f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_2)(2\pi f_3) \mathbf{e}_6,$$

$$(8.15) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1 x_2 x_3}\}(f_1, f_2, f_3) = U(-f_1, f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_1)(2\pi f_2)(2\pi f_3) \mathbf{e}_7.$$

DOWÓD. Udowodnimy jedynie wzór (8.12). Pozostałe zależności wykazuje się analogicznie. Korzystając z Twierdzenia 8.1 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1 x_2}\}(f_1, f_2, f_3) &= \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1}\}(f_1, f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_2 \mathbf{e}_2) \\ &= U(f_1, -f_2, f_3) \cdot (2\pi f_1 \mathbf{e}_1)(2\pi f_2 \mathbf{e}_2), \end{aligned}$$

gdzie mnożenie oktonionów odbywa się od lewej do prawej. Aby otrzymać równość z tezy, zauważmy, że dla dowolnego oktonionu  $o \in \mathbb{O}$  zachodzi

$$(o \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 = \alpha_{7,6,5,4}(o) \cdot (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = \alpha_{7,6,5,4}(o) \cdot \mathbf{e}_3,$$

a wobec tego

$$\begin{aligned} U(f_1, -f_2, f_3) \cdot (2\pi f_1 \mathbf{e}_1)(2\pi f_2 \mathbf{e}_2) &= \alpha_{7,6,3,2}(U(\mathbf{f})) \cdot (2\pi f_1 \mathbf{e}_1)(2\pi f_2 \mathbf{e}_2) \\ &= (\alpha_{7,6,5,4} \circ \alpha_{7,6,3,2})(U(\mathbf{f})) \cdot (2\pi f_1)(2\pi f_2) \mathbf{e}_3 \\ &= \alpha_{5,4,3,2}(U(\mathbf{f})) \cdot (2\pi f_1)(2\pi f_2) \mathbf{e}_3 \\ &= U(f_1, -f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_1)(2\pi f_2) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Kończy to dowód wzoru (8.12). □

Analogiczny wniosek można wyciągnąć również dla czystych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, przy czym warto zauważyć, że teza twierdzenia nie różni się niczym od odpowiedniego twierdzenia dla klasycznej transformacji Fouriera. Twierdzenie pozostawiamy bez dowodu.

WNIOSEK 8.3. *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$ . Wówczas*

$$(8.16) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1x_1}\}(f_1, f_2, f_3) = -U(f_1, f_2, f_3) \cdot (2\pi f_1)^2,$$

$$(8.17) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_2x_2}\}(f_1, f_2, f_3) = -U(f_1, f_2, f_3) \cdot (2\pi f_2)^2,$$

$$(8.18) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_3x_3}\}(f_1, f_2, f_3) = -U(f_1, f_2, f_3) \cdot (2\pi f_3)^2.$$

Dotychczasowe rozważania można podsumować zbiorczym twierdzeniem o transformatach oktonionowych pochodnych cząstkowych. Teza jest ogólna i może wydawać się skomplikowana, jednak pokrywa wszystkie możliwe przypadki. Jest to oczywisty wniosek z wykazanych do tej pory twierdzeń, zatem dowód tego faktu pominiemy.

TWIERDZENIE 8.4. *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$ . Ponadto niech  $k_1, k_2, k_3$  będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wówczas*

$$(8.19) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\left\{\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}\right\} = (-1)^\gamma U(\varepsilon_1 f_1, \varepsilon_2 f_2, \varepsilon_3 f_3) \cdot (2\pi f_1)^{k_1} (2\pi f_2)^{k_2} (2\pi f_3)^{k_3} \mathbf{e}_\vartheta,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma &= \lfloor k_1/2 \rfloor + \lfloor k_2/2 \rfloor + \lfloor k_3/2 \rfloor, \\ \varepsilon_1 &= (-1)^{\delta_2 \delta_3}, \quad \varepsilon_2 = (-1)^{\delta_1(1-\delta_3)}, \quad \varepsilon_3 = (-1)^{1-(1-\delta_1)(1-\delta_2)}, \\ \vartheta &= \delta_1 \cdot 2^0 + \delta_2 \cdot 2^1 + \delta_3 \cdot 2^2, \\ \delta_1 &= k_1 \bmod 2, \quad \delta_2 = k_2 \bmod 2, \quad \delta_3 = k_3 \bmod 2. \end{aligned}$$

Warto zwrócić w tym miejscu uwagę na zalety jakie niesie ze sobą twierdzenie o transformacie pochodnych cząstkowych. Można to zobrazować poniższym przykładem.

PRZYKŁAD 8.5. Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją parzystą względem każdej zmiennej. Zarówno klasyczna jak i oktonionowa transformata Fouriera tej funkcji są funkcjami rzeczywistymi. Stosując klasyczną transformację Fouriera do funkcji  $u_{x_1x_2}$  otrzymamy  $-U(\mathbf{f}) \cdot (2\pi f_1)(2\pi f_2)$ , a zatem również funkcję o wartościach rzeczywistych. W pewnym sensie tracimy informację o tym, że funkcja została w ogóle zróżniczkowana.

Z kolei OFT funkcji  $u_{x_1x_2}$  jest równa  $U(f_1, -f_2, -f_3) \cdot (2\pi f_1)(2\pi f_2) \mathbf{e}_3$ , zatem jest funkcją czysto urojoną (niezerowa będzie jedynie jej część urojona stojąca przy jednostce  $\mathbf{e}_3$ ). Jasno wskazuje to na różniczkowanie po zmiennych  $x_1$  oraz  $x_2$ .



**8.2. Twierdzenie o dualności splotu i mnożenia.** Jedną z kluczowych własności transformacji Fouriera wykorzystywanych w analizie częstotliwościowej systemów jest tzw. twierdzenie o dualności splotu i mnożenia.

Przypomnijmy, że splotem funkcji  $u, v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy funkcję

$$(u * v)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{y}) \cdot v(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Założenia, które przyjmujemy zazwyczaj w tej sekcji (tzn. bezwzględna całkowalność w sensie Lebesgue'a) są wystarczające, by istniał splot funkcji (wynika to z Twierdzenia Fubiniiego [13]). Własności splotu są dobrze zbadane w literaturze – jest to operator przemienny (tzn.  $u * v = v * u$ ), łączny (tzn.  $(u * v) * w = u * (v * w)$ ) i rozdzielny względem dodawania funkcji (tzn.  $u * (v + w) = u * v + u * w$ ).

Klasyczna transformata Fouriera splotu dwóch funkcji jest równa iloczynowi transformat tych funkcji [39], tzn.

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}} \{u * v\} = \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{u\} \cdot \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{v\}.$$

W przypadku transformat hiperzespolonych pojawia się jednak szereg problemów, które sprawiają, że teza analogicznego twierdzenia nie ma tak zwartej formy. Mnożenie oktonionów nie jest zarówno przemienne, jak i łączne, co automatycznie uniemożliwia uzyskanie prostego wzoru. Zachodzi jednak poniższy odpowiednik klasycznego twierdzenia.

**Twierdzenie 8.6.** *Niech  $u, v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami całkowalnymi w kwadracie (w sensie Lebesgue'a) i niech  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{u\}$ ,  $V = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{v\}$ . Wówczas*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{u * v\}(\mathbf{f}) = & V(f_1, f_2, f_3) \cdot (U_{eee}(\mathbf{f}) - U_{eoo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_4) \\ & + V(f_1, -f_2, -f_3) \cdot (-U_{oeo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_1 + U_{ooe}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_3) \\ & + V(f_1, f_2, -f_3) \cdot (-U_{eoe}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_2 + U_{oee}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_5) \\ (8.20) \quad & + V(-f_1, f_2, -f_3) \cdot (U_{eoo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_6 - U_{ooo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_7), \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ , a

$$V = V_{eee} - V_{oeo} \mathbf{e}_1 - V_{eoe} \mathbf{e}_2 + V_{ooe} \mathbf{e}_3 - V_{eoo} \mathbf{e}_4 + V_{oee} \mathbf{e}_5 + V_{eoo} \mathbf{e}_6 - V_{ooo} \mathbf{e}_7$$

jest rozkładem funkcji  $V$  na składowe o różnej parzystości danym wzorami (7.23)–(7.30).

Zauważmy, że (ze względu na przemienność splotu) prawdziwy jest również wzór

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{u * v\}(\mathbf{f}) = & U(f_1, f_2, f_3) \cdot (V_{eee}(\mathbf{f}) - V_{eoo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_4) \\ & + U(f_1, -f_2, -f_3) \cdot (-V_{oeo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_1 + V_{ooe}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_3) \\ & + U(f_1, f_2, -f_3) \cdot (-V_{eoe}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_2 + V_{oee}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_5) \\ (8.21) \quad & + U(-f_1, f_2, -f_3) \cdot (V_{eoo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_6 - V_{ooo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_7), \end{aligned}$$

gdzie użyto rozkładu funkcji  $U$  na składowe o różnej parzystości.

Równość (8.20) jest uogólnieniem wzorów zaprezentowanych w [19] oraz [44]. Ponadto, jeśli przynajmniej jedna z funkcji  $u$  i  $v$  jest parzysta względem zmiennych  $x_1$  i  $x_2$ , to wzór sprowadza się do znanej klasycznej postaci. W dalszej części tej sekcji, przeprowadzając podobne rozważania co w [44], sprowadzimy równość (8.20) do prostszej postaci.

DOWÓD. Wykorzystamy własności oktonionów – dla dowolnych  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  mamy

$$(8.22) \quad \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \quad ) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \quad ) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \quad ) = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \right),$$

$$(8.23) \quad \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \quad ) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \quad ) = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_1,$$

$$(8.24) \quad \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \quad ) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \quad ) = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_2,$$

$$(8.25) \quad \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \quad ) = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_3,$$

$$(8.26) \quad \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \quad ) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \quad ) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4) = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_4,$$

$$(8.27) \quad \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \quad ) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4) = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_5,$$

$$(8.28) \quad \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \quad ) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4) = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_6,$$

$$(8.29) \quad \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4) = \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2}) \cdot e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \right) \cdot \mathbf{e}_7.$$

Z definicji OFT i splotu, Twierdzenia Fubniego oraz stosując podstawienie otrzymamy

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{y}) \cdot v(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{y}) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} v(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 x_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 x_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 x_3} \, d\mathbf{x} \right) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{y}) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} v(\mathbf{x}) \cdot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 (x_1 + y_1)} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 (x_2 + y_2)} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 (x_3 + y_3)} \, d\mathbf{x} \right) \, d\mathbf{y} = (\star). \end{aligned}$$

Zajmijmy się wewnętrzną całką. Jądro przekształcenia możemy rozpisać w postaci

$$\begin{aligned} & e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 (x_1 + y_1)} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 (x_2 + y_2)} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 (x_3 + y_3)} \\ &= \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \cos(\beta_1)) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \cos(\beta_2)) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \cos(\beta_3)) \\ &\quad - \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1 \sin(\beta_1)) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \cos(\beta_2)) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \cos(\beta_3)) \\ &\quad - \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \cos(\beta_1)) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2 \sin(\beta_2)) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \cos(\beta_3)) \\ &\quad + \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1 \sin(\beta_1)) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2 \sin(\beta_2)) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \cos(\beta_3)) \\ &\quad - \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \cos(\beta_1)) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \cos(\beta_2)) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4 \sin(\beta_3)) \\ &\quad + \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1 \sin(\beta_1)) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \cos(\beta_2)) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4 \sin(\beta_3)) \\ &\quad + \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \cos(\beta_1)) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2 \sin(\beta_2)) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4 \sin(\beta_3)) \\ &\quad - \left( (e^{-\mathbf{e}_1\alpha_1} \cdot \mathbf{e}_1 \sin(\beta_1)) \cdot (e^{-\mathbf{e}_2\alpha_2} \cdot \mathbf{e}_2 \sin(\beta_2)) \right) \cdot (e^{-\mathbf{e}_4\alpha_3} \cdot \mathbf{e}_4 \sin(\beta_3)), \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha_i = 2\pi f_i x_i$ ,  $\beta_i = 2\pi f_i y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Korzystając z równości (8.22)–(8.29) otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned}
(\star) = & V(f_1, f_2, f_3) \cdot U_{eee}(\mathbf{f}) - V(f_1, -f_2, -f_3) \cdot U_{oee}(\mathbf{f})\mathbf{e}_1 \\
& - V(f_1, f_2, -f_3) \cdot U_{eoe}(\mathbf{f})\mathbf{e}_2 + V(f_1, -f_2, -f_3) \cdot U_{ooe}(\mathbf{f})\mathbf{e}_3 \\
& - V(f_1, f_2, f_3) \cdot U_{eoo}(\mathbf{f})\mathbf{e}_4 + V(f_1, f_2, -f_3) \cdot U_{oee}(\mathbf{f})\mathbf{e}_5 \\
& + V(-f_1, f_2, -f_3) \cdot U_{ooo}(\mathbf{f})\mathbf{e}_6 - V(-f_1, f_2, -f_3) \cdot U_{ooo}(\mathbf{f})\mathbf{e}_7,
\end{aligned}$$

co po pogrupowaniu wyrazów daje tezę.  $\square$

**8.3. Algebra liczb poczwórnych zespolonych.** Aby uprościć wyrażenie w tezie Twierdzenia 8.6 wprowadzimy najpierw nową algebrę, bazującą na algebrze oktonionów. Będzie to algebra przemienne i łączna, w przeciwieństwie do algebry oktonionów, jednak ceną za uzyskanie tych własności będzie utrata innej – nie będzie to algebra z dzieleniem, tzn. nie każdy niezerowy element będzie miał element odwrotny.

Zdefiniujemy tzw. *algebrę liczb poczwórnych zespolonych*  $\mathbb{F}$ . Podobnie jak oktoniony, będzie to algebra ósmego rzędu nad ciałem liczb rzeczywistych i każdy jej element będziemy mogli przedstawić jako ósemkę liczb rzeczywistych, tzn.

$$p = p_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3 + p_4\mathbf{e}_4 + p_5\mathbf{e}_5 + p_6\mathbf{e}_6 + p_7\mathbf{e}_7 \in \mathbb{F}, \quad p_0, \dots, p_7 \in \mathbb{R}.$$

Dodawanie w  $\mathbb{F}$  jest zdefiniowane w sposób klasyczny, element po elemencie, 0 jest elementem neutralnym dodawania, a element przeciwny również zdefiniowany jest standardowo. Aby zdefiniować mnożenie w algebrze  $\mathbb{F}$ , przypomnijmy, że każdy oktonion można zapisać jako czwórkę liczb zespolonych

$$\begin{aligned}
(8.30) \quad p &= (p_0 + p_1\mathbf{e}_1) + (p_2 + p_3\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 + (p_4 + p_5\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_4 + (p_6 + p_7\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4 \\
&= s_0 + s_1\mathbf{e}_2 + s_2\mathbf{e}_4 + s_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4,
\end{aligned}$$

gdzie  $s_0, \dots, s_3 \in \mathbb{C}$  i mnożenie odbywa się zawsze od lewej do prawej.

Każdy element  $\mathbb{F}$  będziemy zatem utożsamiali z czwórką liczb zespolonych  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$ . Każdemu elementowi algebry  $\mathbb{F}$  będzie odpowiadał dokładnie jeden oktonion zdefiniowany za pomocą równości (8.30). Wprowadzamy działanie  $\odot$  (mnożenie) w następujący sposób

$$\begin{aligned}
(8.31) \quad (s_0, s_1, s_2, s_3) \odot (t_0, t_1, t_2, t_3) &= (s_0t_0 - s_1t_1 - s_2t_2 + s_3t_3, \quad s_0t_1 + s_1t_0 - s_2t_3 - s_3t_2, \\
& \quad s_0t_2 + s_2t_0 - s_1t_3 - s_3t_1, \quad s_0t_3 + s_3t_0 + s_1t_2 + s_2t_1)
\end{aligned}$$

dla  $(s_0, s_1, s_2, s_3), (t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{F}$ . Przeprowadzając bezpośrednie obliczenia można otrzymać tabelkę mnożenia, tak jak dla oktonionów (Tab. 8.1). W szczególności widzimy, że jednostki urojone spełniają inne reguły niż te, które znamy z algebry oktonionów, tzn.

$$\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \odot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3 \odot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4 \odot \mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_5 \odot \mathbf{e}_5 = -\mathbf{e}_6 \odot \mathbf{e}_6 = \mathbf{e}_7 \odot \mathbf{e}_7 = -1.$$

Można dostrzec tutaj podobieństwo do liczb podwójnych oraz do liczb podwójnie zespolonych [71], które wykorzystano w analizie systemów za pomocą QFT [44].

$\odot$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	-1	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	-1	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_1$	1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	1	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

TABELA 8.1. Reguły mnożenia w algebrze  $\mathbb{F}$ .

TWIERDZENIE 8.7. *Algebra  $(\mathbb{F}, +, -, 0, \odot, 1)$  jest pierścieniem przemiennym z jedyneką.*

DOWÓD. Algebra  $(\mathbb{F}, +, -, 0)$  jest tożsama z  $(\mathbb{C}^4, +, -, \mathbf{0})$ , zatem jest to grupa przemienna. Przeprowadzając bezpośrednie obliczenia<sup>1</sup> można wykazać również, że działanie  $\odot$  jest łączne oraz przemienne, zatem  $(\mathbb{F}, \odot)$  jest półgrupą przemienną. Ponadto działanie  $\odot$  jest rozdzielne względem dodawania, co daje już spełnienie aksjomatów pierścienia przemiennego. Łatwo zauważyć, że 1 jest elementem neutralnym mnożenia.  $\square$

Rozwiązując odpowiedni układ równań można również wykazać, że w algebrze  $\mathbb{F}$  nie występują dzielniki zera (tzn. jeśli  $s \odot t = 0$ , to  $s = 0$  lub  $t = 0$ ), jednak nie każdy niezerowy element algebry  $\mathbb{F}$  ma element odwrotny. Jeśli element odwrotny liczby  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  istnieje, to jest jedyny i jest dany wzorem

$$(8.32) \quad (s_0, s_1, s_2, s_3)^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} s_0(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 - s_3^2) + 2s_1s_2s_3, & -s_1(s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 + s_3^2) - 2s_0s_2s_3, \\ -s_2(s_0^2 - s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2s_0s_1s_3, & s_3(-s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 2s_0s_1s_2 \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\delta = \left( (s_0 - s_3)^2 + (s_1 + s_2)^2 \right) \left( (s_0 + s_3)^2 + (s_1 - s_2)^2 \right).$$

Nie istnieją elementy odwrotne do takich elementów algebry  $\mathbb{F}$ , dla których  $\delta = 0$ . Ze względu na przemienność mnożenia element odwrotny jest zarówno prawo- jak i lewostronny. Można również zauważyć, że wzór (8.32) pokrywa się ze wzorem (3.4) w pracy [44] dla liczb podwójnie zespolonych, jednak tam wszystkie liczby występujące we wzorze były liczbami rzeczywistymi. We wzorze (8.32) mamy w ogólności do czynienia z liczbami zespolonymi.

<sup>1</sup>Ze względu na poziom skomplikowania rachunków pomijamy w tej sekcji przedstawienie większości z nich. Wszystkie zostały przeprowadzone z pomocą pakietu `Octonions` środowiska *Mathematica*, który został opisany w Dodatku B.

**8.4. Oktonionowa charakterystyka częstotliwościowa.** Rozważmy system liniowy stacjonarny (LS) trzech zmiennych (3D). Wiemy z klasycznej teorii sygnałów i systemów, że takie systemy opisuje się za pomocą ich odpowiedzi impulsowych  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (czasami nazywanych również funkcjami Greena) i wówczas zależność sygnału  $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  na wyjściu systemu od sygnału  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  na wejściu dana jest wzorem

$$(8.33) \quad v(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{y}) \cdot h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = (u * h)(\mathbf{x}).$$

Funkcja na wyjściu systemu jest więc splotem funkcji na wejściu z odpowiedzią impulsową, co schematycznie przedstawia się w postaci blokowej jak na Rys. 8.1.

Z twierdzenia o dualności splotu i mnożenia dla klasycznej transformacji Fouriera wynika natychmiast, że zachodzi następująca równość

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}} \{v\} = \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{u * h\} = \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{h\} \cdot \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{u\}$$

i funkcja  $H = \mathcal{F}_{\text{CFT}} \{h\}$  jest nazywana charakterystyką częstotliwościową systemu. Analogiczne pojęcia wprowadzimy dla OFT.

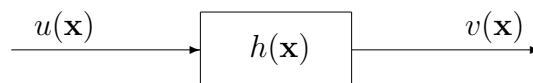
**DEFINICJA 8.8.** Niech  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie odpowiedzią impulsową systemu liniowego stacjonarnego trzech zmiennych. Funkcję  $H_{\text{OFT}} = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{h\}$  nazywamy *oktonionową charakterystyką częstotliwościową* systemu.

W dalszej części wyciągniemy wnioski z rozważań przedstawionych w Sekcji 8.2 i 8.3. Pozwolą one na wykorzystanie OFT do analogicznej analizy równań różniczkowych jak w przypadku klasycznej transformacji Fouriera.

**WNIOSEK 8.9.** *Zależność między oktonionowymi transformatami Fouriera funkcji  $u$  na wejściu i  $v$  na wyjściu systemu LS trzech zmiennych o odpowiedzi impulsowej  $h$  dana jest wzorem*

$$(8.34) \quad \begin{aligned} V(f_1, f_2, f_3) = & H_{\text{OFT}}(f_1, f_2, f_3) \cdot (U_{eee}(\mathbf{f}) - U_{e eo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_4) \\ & + H_{\text{OFT}}(f_1, -f_2, -f_3) \cdot (-U_{oe e}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_1 + U_{oo e}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_3) \\ & + H_{\text{OFT}}(f_1, f_2, -f_3) \cdot (-U_{e oe}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_2 + U_{o eo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_5) \\ & + H_{\text{OFT}}(-f_1, f_2, -f_3) \cdot (U_{e oo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_6 - U_{ooo}(\mathbf{f}) \mathbf{e}_7), \end{aligned}$$

gdzie  $V = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{v\}$ ,  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{u\}$ ,  $H_{\text{OFT}} = \mathcal{F}_{\text{OFT}} \{h\}$ .



RYSUNEK 8.1. Schemat blokowy systemu 3D-LS.

WNIOSEK 8.10. Równość (8.34) można zapisać za pomocą mnożenia  $\odot$  w pierścieniu liczb poczwórnych zespolonych  $\mathbb{F}$  jako

$$(8.35) \quad V(f_1, f_2, f_3) = H_{\text{OFT}}(f_1, f_2, f_3) \odot U(f_1, f_2, f_3).$$

DOWÓD. Równość (8.35) wynika z bezpośredniego rachunku, który został przeprowadzony za pomocą pakietu `Octonions` środowiska *Mathematica*.  $\square$

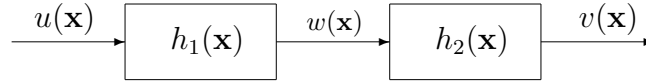
Rozważmy teraz klasyczne połączenia systemów, tzn. połączenie szeregowe, równoległe oraz ze sprzężeniem zwrotnym. Zaczniemy od połączenia szeregowego przedstawionego na Rys. 8.2. Wiemy już, że dla takiego systemu możemy zapisać równości

$$\begin{aligned} V(\mathbf{f}) &= H_{2,\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot W(\mathbf{f}), \\ W(\mathbf{f}) &= H_{1,\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot U(\mathbf{f}), \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy standardowe oznaczenia  $V = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{v\}$ ,  $W = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{w\}$ ,  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$ ,  $H_{1,\text{OFT}} = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{h_1\}$  oraz  $H_{2,\text{OFT}} = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{h_2\}$ . Ze względu na fakt, że mnożenie  $\odot$  w algebrze liczb poczwórnych zespolonych jest łączne i przemienne otrzymujemy

$$V(\mathbf{f}) = H_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot U(\mathbf{f}), \quad \text{gdzie } H_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = H_{1,\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot H_{2,\text{OFT}}(\mathbf{f}).$$

Jest to odpowiednik znanego twierdzenia dla klasycznej transformacji Fouriera.

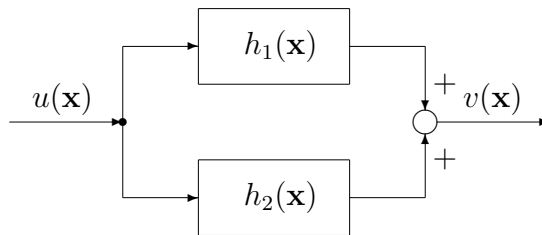


RYSUNEK 8.2. Schemat blokowy szeregowego połączenia systemów 3D-LS.

W przypadku połączenia równoległego (Rys. 8.3) sytuacja jest znacznie prostsza. Ponieważ mnożenie  $\odot$  jest rozdzielne względem dodawania otrzymujemy

$$V(\mathbf{f}) = H_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot U(\mathbf{f}), \quad \text{gdzie } H_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = H_{1,\text{OFT}}(\mathbf{f}) + H_{2,\text{OFT}}(\mathbf{f}).$$

Wynik ten jest również odpowiednikiem klasycznego twierdzenia.



RYSUNEK 8.3. Schemat blokowy równoległego połączenia systemów 3D-LS.

Obliczenia znacznie się komplikują, gdy rozważamy połączenie ze sprzężeniem zwrotnym, jak na Rys. 8.4. Możemy dla tego systemu napisać układ równań

$$\begin{aligned} V(\mathbf{f}) &= H_{1,\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot W(\mathbf{f}), \\ W(\mathbf{f}) &= U(\mathbf{f}) - H_{2,\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot V(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

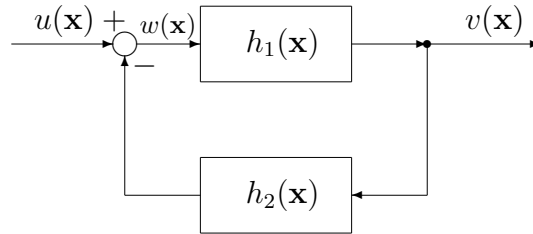
Wówczas, korzystając z łączności i przemienności mnożenia  $\odot$  w algebrze liczb poczwórnych zespolonych, otrzymamy

$$(1 + H_{1,\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot H_{2,\text{OFT}}(\mathbf{f})) \odot V(\mathbf{f}) = H_{1,\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot U(\mathbf{f}),$$

co prowadzi do wzoru

$$V(\mathbf{f}) = H_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot U(\mathbf{f}), \quad \text{gdzie } H_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = (1 + H_{1,\text{OFT}}(\mathbf{f}) \odot H_{2,\text{OFT}}(\mathbf{f}))^{-1} \odot H_{1,\text{OFT}}(\mathbf{f}),$$

gdzie odwrotność jest rozumiana w sensie odwrotności działania  $\odot$  w algebrze liczb poczwórnych zespolonych. Jest to oczywiście wzór znany z klasycznej teorii. Należy jednak pamiętać, że algebra  $\mathbb{F}$  liczb poczwórnych zespolonych nie jest algebrą z dzieleniem i odwrotność w powyższym wzorze nie zawsze musi istnieć. Widzimy więc, że nie każdy system liniowy i stacjonarny trzech zmiennych może być opisany za pomocą operatora splotu i analizowany za pomocą oktonionowej transformacji Fouriera.



RYSUNEK 8.4. Schemat blokowy systemu 3D-LS ze sprzężeniem zwrotnym.

**8.5. Analiza pewnych równań różniczkowych i różnicowych.** Rozważania opisywane w tej sekcji można zastosować także w analizie pewnych liniowych równań różniczkowych cząstkowych oraz liniowych równań różnicowych. Klasyczna transformacja Fouriera jest z powodzeniem stosowana jako narzędzie w rozwiązywaniu liniowych równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach ze względu na fakt, że przekształca takie równania w równania algebraiczne [39]. Pokażemy, że jest to prawda również w przypadku oktonionowej transformacji Fouriera. Wykażemy również, że analogiczne rozważania mogą dotyczyć także równań różnicowych o stałych współczynnikach, co doprowadzi jednocześnie do zdefiniowania dyskretnej oktonionowej transformacji Fouriera.

W Sekcji 8.1 wykazaliśmy twierdzenia o OFT pochodnych cząstkowych funkcji trzech zmiennych. Możemy teraz wyciągnąć wniosek z tych twierdzeń i zapisać odpowiednie równości za pomocą mnożenia w algebrze liczb poczwórnych zespolonych.

WNIOSEK 8.11. *Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$ . Wówczas*

$$(8.36) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1}\}(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot (2\pi f_1)\mathbf{e}_1,$$

$$(8.37) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_2}\}(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot (2\pi f_2)\mathbf{e}_2,$$

$$(8.38) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1x_2}\}(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot (2\pi f_1)(2\pi f_2)\mathbf{e}_3,$$

$$(8.39) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_3}\}(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot (2\pi f_3)\mathbf{e}_4,$$

$$(8.40) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1x_3}\}(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot (2\pi f_1)(2\pi f_3)\mathbf{e}_5,$$

$$(8.41) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_2x_3}\}(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot (2\pi f_2)(2\pi f_3)\mathbf{e}_6,$$

$$(8.42) \quad \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u_{x_1x_2x_3}\}(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot (2\pi f_1)(2\pi f_2)(2\pi f_3)\mathbf{e}_7.$$

Widzimy, że każde liniowe równanie cząstkowe o stałych współczynnikach możemy sprowadzić do równania algebraicznego (w sensie mnożenia w algebrze  $\mathbb{F}$ ). Zauważmy, że w przypadku równań drugiego rzędu, w których nie występują pochodne mieszane, jest to prawda także w sensie mnożenia oktonionów, np. dla niejednorodnego równania falowego

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + f(t, x_1, x_2)$$

otrzymamy

$$\left( (2\pi f_1)^2 + (2\pi f_2)^2 - (2\pi\tau)^2 \right) \cdot U(\tau, f_1, f_2) = F(\tau, f_1, f_2),$$

gdzie  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$  oraz  $F = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{f\}$ . Jednak już w przypadku równania przewodnictwa ciepła, tzn.

$$u_t = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + f(t, x_1, x_2)$$

te dwa podejścia nie są równoważne i dostajemy

$$\left( (2\pi f_1)^2 + (2\pi f_2)^2 + (2\pi\tau)\mathbf{e}_1 \right) \odot U(\tau, f_1, f_2) = F(\tau, f_1, f_2).$$

Odwrotność (w sensie algebry  $\mathbb{F}$ ) liczby  $\left( (2\pi f_1)^2 + (2\pi f_2)^2 + (2\pi\tau)\mathbf{e}_1 \right)$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $(\tau, f_1, f_2) \neq (0, 0, 0)$  i jest równa

$$\left( (2\pi f_1)^2 + (2\pi f_2)^2 + (2\pi\tau)\mathbf{e}_1 \right)^{-1} = \frac{(2\pi f_1)^2 + (2\pi f_2)^2 - (2\pi\tau)\mathbf{e}_1}{\left( (2\pi f_1)^2 + (2\pi f_2)^2 \right)^2 + (2\pi\tau)^2},$$

a zatem

$$U(\tau, f_1, f_2) = \frac{(2\pi f_1)^2 + (2\pi f_2)^2 - (2\pi\tau)\mathbf{e}_1}{\left( (2\pi f_1)^2 + (2\pi f_2)^2 \right)^2 + (2\pi\tau)^2} \odot F(\tau, f_1, f_2).$$

Nie można uzyskać tak prostej postaci używając mnożenia w algebrze oktonionów.



Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla równań różnicowych, tzn. równań postaci

$$(8.43) \quad \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} \sum_{i_3=0}^{M_3} a_{\mathbf{i}} u(\mathbf{n} - \mathbf{i}) = \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} b_{\mathbf{j}} v(\mathbf{n} - \mathbf{j}), \quad a_{(0,0,0)} \neq 0$$

gdzie  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$  i  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ . Zauważmy, że w Twierdzeniu 7.16 występowały charakterystyczne zmiany znaków przy zmiennych w funkcji oktonionowej transformaty Fouriera. Stosując działania algebry  $\mathbb{F}$  można sprowadzić to twierdzenie (dla funkcji o wartościach rzeczywistych) do prostszej postaci.

**WNIOSEK 8.12.** Niech  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i  $U = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u\}$ . Ponadto, niech  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  i niech  $u^\alpha(\mathbf{x}) = u(x_1 - \alpha, x_2, x_3)$ ,  $u^\beta(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2 - \beta, x_3)$  i  $u^\gamma(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3 - \gamma)$ ,  $U^\ell = \mathcal{F}_{\text{OFT}}\{u^\ell\}$ ,  $\ell = \alpha, \beta, \gamma$ . Wówczas

$$(8.44) \quad U^\alpha(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 \alpha},$$

$$(8.45) \quad U^\beta(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 \beta},$$

$$(8.46) \quad U^\gamma(\mathbf{f}) = U(\mathbf{f}) \odot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 \gamma}.$$

Jest to odpowiednik znanego twierdzenia dla klasycznej transformacji Fouriera. Wykorzystując powyższe równości możemy sprowadzić każde równanie typu (8.43) do postaci

$$\begin{aligned} U(\mathbf{f}) \odot \left( \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} \sum_{i_3=0}^{M_3} a_{\mathbf{i}} e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 i_1} \odot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 i_2} \odot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 i_3} \right) \\ = V(\mathbf{f}) \odot \left( \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} b_{\mathbf{j}} e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 j_1} \odot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 j_2} \odot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 j_3} \right). \end{aligned}$$

Można wykazać bezpośrednim rachunkiem, że

$$e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 i_1} \odot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 i_2} \odot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 i_3} = e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 i_1} \cdot e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 i_2} \cdot e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 i_3},$$

gdzie mnożenie w algebrze oktonionów odbywa się od lewej do prawej. Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} U(\mathbf{f}) \odot \left( \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} \sum_{i_3=0}^{M_3} a_{\mathbf{i}} e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 i_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 i_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 i_3} \right) \\ = V(\mathbf{f}) \odot \left( \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} \sum_{j_3=0}^{N_3} b_{\mathbf{j}} e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 j_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 j_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 j_3} \right), \end{aligned}$$

gdzie wyrażenia w nawiasach są pewnymi oktonionowymi odpowiednikami dyskretnych transformacji Fouriera wektorów  $\mathbf{a} = (a_i)$ ,  $\mathbf{b} = (b_j)$  indeksowanych trójwymiarowymi zmiennymi dyskretnymi.

DEFINICJA 8.13. Niech  $\mathbf{a}: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągiem indeksowanym trzema zmiennymi,  $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})$ ,  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ . Oktonionową transformatą Fouriera ciągu  $\mathbf{a}$  nazywamy funkcję

$$(8.47) \quad A_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^3} a_{\mathbf{i}} e^{-\mathbf{e}_1 2\pi f_1 i_1} e^{-\mathbf{e}_2 2\pi f_2 i_2} e^{-\mathbf{e}_4 2\pi f_3 i_3}, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^3,$$

gdzie mnożenie jest wykonywane od lewej do prawej.

Powyższa definicja jest trójwymiarowym odpowiednikiem transformacji Fouriera czasu dyskretnego (ang. *discrete-time Fourier transform*– DTFT), w związku z czym można transformatę daną wzorem (8.47) oznaczać skrótem DSOFOT (ang. *discrete-space octonion Fourier transform*). Podobnie jak jej klasyczny odpowiednik DSOFOT jest funkcją okresową względem każdej zmiennej, z okresem równym 1. Korzystając z metod przedstawionych w dowodzie Twierdzenia 7.1 można wykazać poniższy wzór na transformatę odwrotną.

TWIERDZENIE 8.14. Niech  $\mathbf{a}: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągiem indeksowanym trzema zmiennymi,  $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})$ ,  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ , bezwzględnie sumowalnym. Wówczas

$$a_{\mathbf{i}} = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3} A_{\text{OFT}}(\mathbf{f}) e^{\mathbf{e}_4 2\pi f_3 i_3} e^{\mathbf{e}_2 2\pi f_2 i_2} e^{\mathbf{e}_1 2\pi f_1 i_1} d\mathbf{f}$$

(gdzie mnożenie jest wykonywane od lewej do prawej).

Dyskretne transformacje Fouriera nie są obiektem zainteresowania tej pracy, na tym więc zakończymy rozważania w tym rozdziale.

Twierdzenia zaprezentowane w tym rozdziale są naturalnymi uogólnieniami wyników znanych od dawna dla klasycznej transformacji Fouriera, a także dla kwaternionowej transformacji Fouriera. Stanowią bezpośrednią kontynuację prac prof. Stefana L. Hahna i dr hab. Kajetany M. Snopek, którzy zaproponowali ogólną definicję transformacji Fouriera w sensie Cayleya-Dicksona i wykorzystali ją do badań nad hiperzespolonymi sygnałami analitycznymi. Nie ma jednak w tych pracach teoretycznego uzasadnienia poprawności definicji OFT i wyprowadzenia jej podstawowych własności. Wyniki przedstawione w Sekcjach 7 i 8, w pełni autorskie, uzupełniają te braki.

Inspiracją do podjęcia badań w tym zakresie były także prace nad zastosowaniami kwaternionowych transformacji Fouriera w teorii systemów i w analizie rozwiązań pewnych równań różniczkowych cząstkowych dwóch zmiennych. Dzięki wprowadzeniu algebry liczb poczwórnych zespolonych możliwe stało się uogólnienie tych rozważań i zastosowanie OFT w teorii systemów trzech zmiennych, a także do analizy rozwiązań równań różniczkowych oraz różnicowych. Doprowadziło to także do zdefiniowania oktonionowej transformacji Fouriera ciągów (czyli OFT zdyskretyzowanej przestrzeni), co zgodnie z naszą wiedzą nie pojawiło się dotychczas w literaturze tematu.

Pokazuje to także potencjalne kierunki dalszych badań. Teoria dyskretnych oktonionowych transformacji Fouriera nie została dotychczas zbadana, ale wstępne wyniki przedstawione w tym rozdziale sugerują, że można będzie ją wykorzystać do analizy wszelkich danych wolumetrycznych. Jest to możliwe także z wykorzystaniem klasycznych transformacji Fouriera, jednak podejście hiperzespolone umożliwia w naturalny sposób niezależną analizę zmienności sygnału w każdym kierunku.



## Podsumowanie i wnioski końcowe

Celem pracy było uogólnienie pewnych znanych metod teorii sygnałów na algebry Cayleya-Dicksona, w szczególności kwaterniony i oktoniony. Cel ten zrealizowano kładąc szczególny nacisk na dwa aspekty – zastosowanie kwaternionów w teorii oszczędnego próbkowania oraz wykorzystanie oktonionowej transformacji Fouriera w teorii systemów. Odnosząc się do głównych dwóch tez pracy, tzn.

1. Klasyczną teorię oszczędnego próbkowania można rozszerzyć na przypadek sygnałów kwaternionowych i kwaternionowych macierzy pomiarowych,
2. Oktonionowa transformacja Fouriera ma własności, które pozwalają na zastosowanie jej w analizie sygnałów i systemów 3D,

możemy wyciągnąć poniższe wnioski.

### Część 1.

- 1.1. Twierdzenie o stabilnej rekonstrukcji sygnałów skończenie-wymiarowych z niewielkiej liczby liniowych pomiarów obciążonych błędem uogólnia się na przypadek wektorów i macierzy kwaternionowych.
- 1.2. Możliwe jest dokładne zrekonstruowanie rzadkich wektorów kwaternionowych z niewielkiej liczby pomiarów kwaternionowych za pomocą zadania minimalizacji normy  $\ell_1$ .
- 1.3. Kwaternionowe losowe macierze gaussowskie mają z dużym prawdopodobieństwem własność ograniczonej izometrii, tj. spełniają założenia Twierdzenia o stabilnej rekonstrukcji.
- 1.4. Możliwe jest zastosowanie metod oszczędnego próbkowania do rekonstrukcji obrazów kolorowych z niewielkiej ilości liniowych pomiarów kwaternionowych.
- 1.5. Eksperymenty numeryczne sugerują, że uzyskane w poszczególnych twierdzeniach oszacowania nie są optymalne i można je poprawić.

### Część 2.

- 2.1. Oktonionowa transformacja Fouriera funkcji trzech zmiennych rzeczywistych o wartościach oktonionowych jest poprawnie zdefiniowana i zachodzi twierdzenie o transformacji odwrotnej.

- 
- 2.2. Większość własności klasycznej i kwaternionowej transformacji Fouriera uogólnia się na przypadek przekształcenia oktonionowego, w szczególności zachodzi oktonionowy odpowiednik twierdzenia o hermitowskiej symetrii transformacji Fouriera funkcji o wartościach rzeczywistych.
  - 2.3. Można zdefiniować oktonionowy odpowiednik funkcji autokorelacji sygnału o wartościach rzeczywistych.
  - 2.4. Wprowadzając nową algebrę liczb poczwórnych zespolonych można uogólnić na przypadek oktonionowy twierdzenie o dualności splotu i mnożenia.
  - 2.5. Oktonionową transformację Fouriera można zastosować do opisu liniowych stacjonarnych systemów trójwymiarowych modelowanych za pomocą równań różniczkowych cząstkowych oraz równań różnicowych.

Dodatkowym rezultatem pracy jest opracowanie narzędzia do przeprowadzania obliczeń symbolicznych w algebrze oktonionów, tzn. zaimplementowanie pakietu `Octonions` do środowiska *Mathematica*.

Wyniki przedstawione w rozprawie stanowią podstawę do dalszych badań w tej tematyce, zarówno teoretycznych, jak i eksperymentalnych. Uwzględniając podział na dwie niezależne części opisane w rozprawie, można wyróżnić dwa kierunki dalszych prac.

Badania w zakresie kwaternionowej teorii oszczędnego próbkowania będą skupiały się na osłabieniu założeń na wielkość stałej ograniczonej izometrii w Twierdzeniu o stabilnej rekonstrukcji, a także na znalezieniu kolejnych przykładów macierzy pomiarowych, które mają własność ograniczonej izometrii. Istotnym elementem prac będą także próby praktycznego zastosowania tej teorii, np. w przetwarzaniu obrazów kolorowych. Duże nadzieje budzi również pomysł wykorzystania kwaternionów do zamodelowania sygnału w badaniach dyfuzyjnych mózgu w tomografii rezonansu magnetycznego.

Rozważania na temat oktonionowej transformacji Fouriera miały do tej pory głównie charakter teoretyczny, nie jest to jednak etap zamknięty. Dalszych prac wymaga zagadnienie dyskretnych oktonionowych transformacji Fouriera, tematem otwartym jest także postać polarna oktonionu zawierająca odpowiedniki kątów Eulera i weryfikacja hipotezy Hahna. Przyszłe kierunki badań to także znalezienie konkretnych zastosowań omawianej teorii oraz potencjalne rozszerzenie rozważań na inne struktury algebraiczne – zarówno abstrakcyjne, jak i dostosowane do rozważanych obecnie w literaturze problemów aplikacyjnych.

## Dodatek

### A. Narzędzia z teorii prawdopodobieństwa

W tej sekcji zgromadzimy fakty z teorii prawdopodobieństwa dotyczące zmiennych podwykładniczych, istotne dla dowodu własności ograniczonej izometrii dla losowych macierzy gaussowskich w Sekcji 4.3. Na początku przytoczymy definicję zmiennej podwykładniczej oraz pokażemy, że rozkład gamma jest przykładem takiego rozkładu. Następnie wykażemy oszacowanie na „ogony” (ang. *tail bounds*) takich zmiennych losowych.

DEFINICJA A.1. Zmienną losową  $X$  nazywamy *podwykładniczą* (ang. *sub-exponential*), jeśli istnieją  $\sigma^2 > 0$  oraz  $\delta > 0$  takie, że

$$(A.1) \quad \mathbb{E} \left( e^{t(X - \mathbb{E}X)} \right) \leq \exp \left( \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \quad \text{dla } |t| \leq \frac{1}{\delta},$$

co równoważnie można zapisać w postaci

$$(A.2) \quad M(t) \leq \exp \left( \mathbb{E}X \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \quad \text{dla } |t| \leq \frac{1}{\delta},$$

gdzie  $M(t) = \mathbb{E} e^{tX}$  jest funkcją generującą momenty. Piszemy wtedy  $X \sim \text{SubExp}(\sigma^2, \delta)$ .

W literaturze takie zmienne nazywa się czasem *lokalnie podgaussowskimi*. Wynika to z faktu, że zmienną losową nazywamy *podgaussowską*, jeśli (A.1) zachodzi dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$  [30, 53]. Wtedy zmienną nazywamy podwykładniczą, jeśli jest kwadratem zmiennej podgaussowskiej [53]. Na potrzeby tej pracy przyjęliśmy definicję przytoczoną za [99].

TWIERDZENIE A.2. *Niech  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ . Wówczas  $X \sim \text{SubExp}(\frac{4\alpha}{\beta^2}, \frac{2}{\beta})$ .*

DOWÓD. Wiemy, że  $\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\beta}$  oraz  $M(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}$  dla  $0 \leq t < \beta$  [66]. Stąd na przedziale  $0 \leq t < \beta$  mamy

$$M(t) = \left( \frac{1}{1 - \frac{t}{\beta}} \right)^\alpha = \left( \frac{1 - \left(\frac{t}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}{1 - \frac{t}{\beta}} \right)^\alpha = \left( 1 + \frac{t}{\beta} + \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}{1 - \frac{t}{\beta}} \right)^\alpha = (\star).$$

Zauważmy, że dla  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  zachodzi nierówność  $\frac{x^2}{1-x} \leq 2x^2$ , a stąd dla  $\frac{t}{\beta} \leq \frac{1}{2}$  zachodzi

$$(\star) \leq \left( 1 + \frac{t}{\beta} + 2 \left( \frac{t}{\beta} \right)^2 \right)^\alpha \leq \exp \left( \alpha \cdot \left( \frac{t}{\beta} + 2 \left( \frac{t}{\beta} \right)^2 \right) \right) = \exp \left( \frac{\alpha}{\beta} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\alpha}{\beta^2} \cdot t^2 \right).$$

Stąd  $\sigma^2 = \frac{4\alpha}{\beta^2}$  oraz  $\delta = \frac{2}{\beta}$ . □

Zmienne o rozkładzie  $\Gamma(\alpha, \beta)$  są podwykładnicze również z innymi parametrami, o czym mówi poniższy wniosek.

**WNIOSEK A.3.** *Niech  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ . Wówczas dla dowolnego  $0 < \gamma < 1$  zachodzi  $X \sim \text{SubExp}(\frac{2}{1-\gamma} \frac{\alpha}{\beta^2}, \frac{1}{\gamma\beta})$ .*

**DOWÓD.** Rozumowanie przebiega analogicznie jak w Twierdzeniu A.2. Korzystamy jednak z faktu, że dla  $0 \leq x \leq \gamma$  zachodzi  $\frac{x^2}{1-x} \leq \frac{1}{1-\gamma} x^2$ , co prowadzi do tezy.  $\square$

W dowodzie oszacowania na „ogony” skorzystamy z klasycznej wykładniczej nierówności Czebyszewa (Twierdzenie A.4), przytoczonej za [66]. Sformułowanie Twierdzenia A.5 o oszacowaniu „ogonów” przytaczamy za [99].

**TWIERDZENIE A.4.** *Jeśli  $\mathbb{E} e^{pX} < \infty$  dla pewnego  $p > 0$ , to dla  $\lambda \in [0, p]$*

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E} e^{\lambda X}}{e^{\lambda \varepsilon}}$$

dla dowolnego  $\varepsilon$ .

**TWIERDZENIE A.5.** *Niech  $X \sim \text{SubExp}(\sigma^2, \delta)$ . Wówczas*

$$(A.3) \quad \mathbb{P}(X - \mathbb{E} X \geq t) \leq \begin{cases} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{\sigma^2}{\delta}, \\ \exp\left(-\frac{t}{2\delta}\right) & \text{dla } \frac{\sigma^2}{\delta} < t. \end{cases}$$

Ponadto zachodzi oszacowanie

$$(A.4) \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E} X| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{\sigma^2}{\delta}.$$

**DOWÓD.** Oznaczmy  $\mu = \mathbb{E} X$  i zauważmy, że z wykładniczej nierówności Czebyszewa oraz definicji rozkładu podwykładniczego otrzymujemy dla  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\delta}$  i dowolnego  $t$  oszacowanie

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\mathbb{E} e^{\lambda(X-\mu)}}{e^{\lambda t}} = e^{-\lambda(t+\mu)} \mathbb{E} e^{\lambda X} \leq e^{-\lambda(t+\mu)} \cdot e^{\lambda\mu + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}} = \exp\left(-\lambda t + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right).$$

Ustalmy  $t \geq 0$  i rozważmy funkcję

$$f(\lambda) = -\lambda t + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}.$$

Można łatwo sprawdzić, że funkcja ta osiąga na prostej  $\mathbb{R}$  minimum globalne dla  $\lambda^* = \frac{t}{\sigma^2}$ .

Rozważmy dwa przypadki. Jeśli  $t \leq \frac{\sigma^2}{\delta}$ , to  $\lambda^* \leq \frac{1}{\delta}$  i minimum funkcji jest rzeczywiście osiągalne na rozważanym przedziale, a wtedy

$$f(\lambda^*) = -\frac{t^2}{\sigma^2} + \frac{t^2}{2\sigma^2} = -\frac{t^2}{2\sigma^2}$$

i otrzymujemy pierwszą część oszacowania (A.3). Jeśli natomiast  $t > \frac{\sigma^2}{\delta}$ , to ponieważ funkcja  $f$  jest na przedziale  $[0, \frac{1}{\delta}]$  monotonicznie malejąca, osiąga minimum w punkcie



granicznym  $\lambda^\dagger = \frac{1}{\delta}$ . Wówczas

$$f(\lambda^\dagger) = -\frac{t}{\delta} + \frac{\sigma^2}{2\delta^2} < -\frac{t}{\delta} + \frac{t}{2\delta} = -\frac{t}{2\delta},$$

co kończy dowód nierówności (A.3).

Analogicznie otrzymamy oszacowanie na prawdopodobieństwo  $\mathbb{P}(X - \mu \leq -t)$ , a wówczas otrzymamy także nierówność (A.4).  $\square$

## B. Pakiet Octonions środowiska *Mathematica*

Środowisko *Mathematica* oferuje domyślnie pakiet `Quaternions`, w którym zaimplementowane zostały funkcje obsługujące nowy format liczb, tj. kwaterniony [49]. Pewne metody, charakterystyczne dla liczb zespolonych, a które uogólnia się na algebrę kwaternionów, zostały nadpisane i przystosowane do obsługi nowych struktur danych. Stanowiło to inspirację do przygotowania pakietu `Octonions`, który obsługuje algebrę oktonionów.

Tak jak kwaterniony w przypadku pakietu `Quaternions`, oktoniony są reprezentowane przez odrębną strukturę liczb, wywoływaną jako ósemka liczb rzeczywistych, tak jak poniżej.

```
In[1]:= << Octonions`
In[2]:= Octonion[x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7]
Out[2]:= Octonion[x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7]
```

Struktura została tak zdefiniowana, by obsługiwała zarówno wartości liczbowe, jak i zmienne symboliczne. Możliwe jest również odwołanie się do zmiennej typu `Octonions` jak do listy.

```
In[3]:= x = Octonion[1, 0, 5, 0, 0, 0, 1, 1];
In[4]:= x[[3]]
Out[4]:= 5
```

Wraz z zaimplementowaniem nowej struktury danych konieczne było zdefiniowanie na nowo podstawowych działań, tzn. dodawania (w tym celu należało przeciążyć operator `+`) i mnożenia. W tym drugim przypadku przeciążono symbol nieprzemiennej mnożenia `**`, który jest używany również w pakiecie `Quaternions`. Dużym ułatwieniem okazało się tutaj skorzystanie z konstrukcji Cayleya-Dicksona opisanej w Sekcji 2.2, która pozwoliła na zdefiniowanie mnożenia oktonionów za pomocą mnożenia kwaternionów (obecnego w pakiecie `Quaternions`), tak jak we wzorze (2.28). Konieczne okazało się również nadanie własności braku łączności w przypadku tego działania.

```
In[5]:= x = Octonion[x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7];
        y = Octonion[y0, y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7];
In[7]:= x ** y
Out[7]:= Octonion[x0 y0 - x1 y1 - x2 y2 - x3 y3 - x4 y4 - x5 y5 - x6 y6 - x7 y7,
                x1 y0 + x0 y1 - x3 y2 + x2 y3 - x5 y4 + x4 y5 + x7 y6 - x6 y7,
                x2 y0 + x3 y1 + x0 y2 - x1 y3 - x6 y4 - x7 y5 + x4 y6 + x5 y7,
                x3 y0 - x2 y1 + x1 y2 + x0 y3 - x7 y4 + x6 y5 - x5 y6 + x4 y7,
                x4 y0 + x5 y1 + x6 y2 + x7 y3 + x0 y4 - x1 y5 - x2 y6 - x3 y7,
                x5 y0 - x4 y1 + x7 y2 - x6 y3 + x1 y4 + x0 y5 + x3 y6 - x2 y7,
                x6 y0 - x7 y1 - x4 y2 + x5 y3 + x2 y4 - x3 y5 + x0 y6 + x1 y7,
                x7 y0 + x6 y1 - x5 y2 - x4 y3 + x3 y4 + x2 y5 - x1 y6 + x0 y7]
```

Aby wyróżnić jednostki urojone i ułatwić posługiwanie się tymi wielkościami, w pakiecie zaimplementowana jest również możliwość dodawania i mnożenia przez jednostki urojone, na które zarezerwowano symbole  $E1, E2, \dots, E7$ . Ten dodatkowy zabieg pozwala na automatyczne wygenerowanie tabelki mnożenia oktonionów (zaprezentowanej wcześniej w Sekcji 2.2, w Tab. 2.2).

```
In[8]:= OctonionsProductTable []
Out[8]/TableForm=
```

	1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
1	1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
E1	E1	-1	E3	-E2	E5	-E4	-E7	E6
E2	E2	-E3	-1	E1	E6	E7	-E4	-E5
E3	E3	E2	-E1	-1	E7	-E6	E5	-E4
E4	E4	-E5	-E6	-E7	-1	E1	E2	E3
E5	E5	E4	-E7	E6	-E1	-1	-E3	E2
E6	E6	E7	E4	-E5	-E2	E3	-1	-E1
E7	E7	-E6	E5	E4	-E3	-E2	E1	-1

W pakiecie dostępnych jest również wiele funkcji podstawowych, znanych z pakietu `Quaternions`. Lista dostępnych funkcji znajduje się w Tab. B.2.

Domyślnie każda zmienna typu `Octonion` wyświetlana jest w formacie zaprezentowanym powyżej, co może być nieczytelne. Pakiet `Octonions` oferuje możliwość wyświetlania oktonionów w formie analogicznej do liczb zespolonych, tzn. jako ósemki liczb rzeczywistych z odpowiednimi jednostkami urojonymi. Odpowiada za to funkcja `FromOctonion`.

```
In[9]:= z = Octonion [1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 1];
FromOctonion [z]
Out[10]= 1 + 2 E3 + 3 E4 + E7
```

funkcja	działanie
<code>Octonion[x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7]</code>	konstruktor obiektu typu <code>Octonion</code>
<code>Conjugate[o]</code>	liczba sprzężona
<code>Abs[o]</code>	moduł
<code>Norm[o]</code>	kwadrat modułu
<code>Re[o]</code>	część rzeczywista
<code>Im[o]</code>	część urojona
<code>AbsE17[o]</code>	moduł części urojonej
<code>Divide[o1,o2]</code>	prawie dzielenie dwóch oktonionów, $o_1/o_2$
<code>Exp[o]</code>	funkcja eksponencjalna
<code>Sin[o]</code>	funkcja sinus
<code>Cos[o]</code>	funkcja cosinus
<code>Integrate[u, {x, a, b}]</code>	całka z f. u zm. $x$ po przedziale $(a,b)$

TABELA B.2. Najważniejsze funkcje dostępne w pakiecie `Octonions`.

Ważną z punktu widzenia tej pracy jest również implementacja oktonionowej transformacji Fouriera funkcji rzeczywistych trzech zmiennych. Działa ona na zmiennych symbolicznych, tzn. tylko dla tych funkcji, dla których środowisko *Mathematica* potrafi obliczyć całkę Fouriera w sensie klasycznym. Obliczenie transformaty funkcji  $u$  trzech zmiennych, których nazwy zawarte są w 3-elementowym wektorze  $\mathbf{x}$ , wywoływane jest funkcją `OFT[u, x, f]`, gdzie  $\mathbf{f}$  jest wektorem (3-elementowym) nazw trzech zmiennych częstotliwościowych. Przykładowe wywołanie tego polecenia dla funkcji z Przykładu 7.3 przedstawione jest poniżej.

$$\text{In[11]:= } \Sigma = \left\{ \left\{ \left( \frac{1}{10} \right)^2, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \left( \frac{1}{10} \right)^2, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \left( \frac{1}{10} \right)^2 \right\} \right\};$$

$$\text{In[12]:= } \mu = \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\};$$

$$\text{In[13]:= } \mathbf{f}[\mathbf{x1}_, \mathbf{x2}_, \mathbf{x3}_] = \text{Module} \left[ \{ \mathbf{x} \}, \mathbf{x} = \{ \{ \mathbf{x1} \}, \{ \mathbf{x2} \}, \{ \mathbf{x3} \} \};$$

$$\frac{1}{(2 \pi)^{3/2} \text{Det}[\Sigma]^{1/2}} \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2} (\text{Transpose}[\mathbf{x} - \mu] \cdot \text{Inverse}[\Sigma] \cdot (\mathbf{x} - \mu)) [[1, 1]] \right];$$

$$\text{In[14]:= } \mathbf{F}[\mathbf{f1}_, \mathbf{f2}_, \mathbf{f3}_] = \text{OFT}[\mathbf{f}[\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}], \{ \mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3} \}, \{ \mathbf{f1}, \mathbf{f2}, \mathbf{f3} \}];$$

$$\text{In[15]:= } \mathbf{F}[\mathbf{f1}, \mathbf{f2}, \mathbf{f3}]$$

$$\begin{aligned} \text{Out[15]= } & \text{Octonion} \left[ e^{-\frac{1}{50} \pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} \text{Cos}[\pi f_1] \text{Cos}[\pi f_2] \text{Cos}[\pi f_3], \right. \\ & -e^{-\frac{1}{50} \pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} \text{Cos}[\pi f_2] \text{Cos}[\pi f_3] \text{Sin}[\pi f_1], \\ & -e^{-\frac{1}{50} \pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} \text{Cos}[\pi f_1] \text{Cos}[\pi f_3] \text{Sin}[\pi f_2], \\ & e^{-\frac{1}{50} \pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} \text{Cos}[\pi f_3] \text{Sin}[\pi f_1] \text{Sin}[\pi f_2], \\ & -e^{-\frac{1}{50} \pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} \text{Cos}[\pi f_1] \text{Cos}[\pi f_2] \text{Sin}[\pi f_3], \\ & e^{-\frac{1}{50} \pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} \text{Cos}[\pi f_2] \text{Sin}[\pi f_1] \text{Sin}[\pi f_3], \\ & e^{-\frac{1}{50} \pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} \text{Cos}[\pi f_1] \text{Sin}[\pi f_2] \text{Sin}[\pi f_3], \\ & \left. -e^{-\frac{1}{50} \pi^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} \text{Sin}[\pi f_1] \text{Sin}[\pi f_2] \text{Sin}[\pi f_3] \right] \end{aligned}$$

Rozważania w Sekcji 8.3 wymusiły także implementację mnożenia w algebrze liczb poczwórnych zespolonych  $\mathbb{F}$ . Ponieważ elementy algebry  $\mathbb{F}$  mają strukturę odpowiadającą algebrze oktonionów, nie trzeba była implementować osobnego typu zmiennych – wystarczyło zdefiniować nowe zasady mnożenia. Odpowiada za to funkcja `Prod`. Można dzięki temu automatycznie wygenerować tabelę mnożenia liczb poczwórnych zespolonych, zaprezentowaną wcześniej w Tab. 8.1.

In[16]:= **Prod [x, y]**

Out[16]= Octonion [x0 y0 - x1 y1 - x2 y2 + x3 y3 - x4 y4 + x5 y5 + x6 y6 - x7 y7,  
 x1 y0 + x0 y1 - x3 y2 - x2 y3 - x5 y4 - x4 y5 + x7 y6 + x6 y7,  
 x2 y0 - x3 y1 + x0 y2 - x1 y3 - x6 y4 + x7 y5 - x4 y6 + x5 y7,  
 x3 y0 + x2 y1 + x1 y2 + x0 y3 - x7 y4 - x6 y5 - x5 y6 - x4 y7,  
 x4 y0 - x5 y1 - x6 y2 + x7 y3 + x0 y4 - x1 y5 - x2 y6 + x3 y7,  
 x5 y0 + x4 y1 - x7 y2 - x6 y3 + x1 y4 + x0 y5 - x3 y6 - x2 y7,  
 x6 y0 - x7 y1 + x4 y2 - x5 y3 + x2 y4 - x3 y5 + x0 y6 - x1 y7,  
 x7 y0 + x6 y1 + x5 y2 + x4 y3 + x3 y4 + x2 y5 + x1 y6 + x0 y7]

In[17]:= **Q4ProductTable []**

Out[17]/TableForm=

	1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
1	1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
E1	E1	-1	E3	-E2	E5	-E4	E7	-E6
E2	E2	E3	-1	-E1	E6	E7	-E4	-E5
E3	E3	-E2	-E1	1	E7	-E6	-E5	E4
E4	E4	E5	E6	E7	-1	-E1	-E2	-E3
E5	E5	-E4	E7	-E6	-E1	1	-E3	E2
E6	E6	E7	-E4	-E5	-E2	-E3	1	E1
E7	E7	-E6	-E5	E4	-E3	E2	E1	-1

Brak własności przemienności i łączności mnożenia sprawia, że operacje w algebrze oktonionów stają się bardzo skomplikowane i uciążliwe. Dzięki zaimplementowaniu pakietu do obliczeń symbolicznych w środowisku *Mathematica* część z obliczeń przedstawionych w Rozdziale 2 uległa znacznemu uproszczeniu i przyspieszeniu. Zmniejszyło się także ryzyko popełnienia błędów wynikających z mnogości indeksów i skomplikowanych zasad mnożenia. Badanie różnych własności oktonionowej transformacji Fouriera staje się wówczas efektywniejsze.

Pakiet *Octonions* przygotowany został w środowisku *Mathematica* w wersji 11.0 i jest dostępny na stronie internetowej [14]. Pakiet w obecnej formie będzie się jeszcze rozwijał, zwłaszcza w kierunku zaimplementowania kolejnych funkcji elementarnych, jak i zagadnień związanych z obliczeniami numerycznymi oraz wizualizacją funkcji o wartościach oktonionowych.



## Bibliografia

- [1] S. S. Ahmad, I. Ali, *Localization theorems for matrices and bounds for the zeros of polynomials over a quaternion division algebra*, (2015), arXiv:1502.08014.
- [2] R. L. Allen, D. W. Mills, *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale and Structure*, wyd. 1, John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [3] A. Badeńska, Ł. Błaszczyk, *Compressed sensing for real measurements of quaternion signals*, (2016), arXiv:1605.07985.
- [4] A. Badeńska, Ł. Błaszczyk, *Compressed sensing in the quaternion algebra*, (2017), arXiv:1704.08202.
- [5] A. Badeńska, Ł. Błaszczyk, *Quaternion Gaussian matrices satisfy the RIP*, (2017), arXiv:1704.08894.
- [6] J. C. Baez, *The Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **39** (2001), nr 2, 145–205.
- [7] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, M. Wakin, *A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices*, Constr. Approx., **28** (2008), nr 3, 253–263.
- [8] Q. Barthélemy, A. Larue, J. Mars, *Color Sparse Representations for Image Processing: Review, Models, and Prospects*, IEEE Trans. Image Process., **24** (2015), nr 11, 3978–3989.
- [9] Q. Barthélemy, A. Larue, J. Mars, *Sparse Approximations for Quaternionic Signals*, Adv. Appl. Clifford Algebr., **24** (2014), nr 2, 383–402.
- [10] M. A. Bernstein, *Handbook of MRI pulse sequences*, wyd. 1, Academic Press, 2004.
- [11] G. Białkowski, *Mechanika klasyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.
- [12] A. Białynicki-Birula, *Algebra*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2016.
- [13] A. Birkholc, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012.
- [14] Ł. Błaszczyk, *Mathematica package Octonions – draft version*, (2016), online 12.04.2017: <http://www.ire.pw.edu.pl/~lblaszcz/nauka/Octonions.m>.
- [15] Ł. Błaszczyk, *Metody oszczędnej próbkowania w algebrze kwaternionów*, praca magisterska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, 2016.
- [16] Ł. Błaszczyk, K. M. Snopek, *Octonion Fourier Transform of real-valued functions of three variables – selected properties and examples*, Signal Process., **136** (2017), 29–37.
- [17] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, *Clifford Analysis*, wyd. 1, Research Notes in Mathematics, vol. 76, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- [18] F. Brackx, E. Hitzer, S. Sangwine, *History of quaternion and Clifford-fourier transforms and wavelets*, Quaternion and Clifford fourier transforms and wavelets (red. E. Hitzer, S. Sangwine), Trends in Mathematics, Springer Science & Business Media, 2013, s. XI–XXVII.
- [19] T. Bülow, *Hypercomplex Spectral Signal Representations for the Processing and Analysis of Images*, rozprawa doktorska, Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Christian-Albrechts-Universität Kiel, 1999.
- [20] T. Bülow, M. Felsberg, G. Sommer, *Non-commutative Hypercomplex Fourier Transforms of Multidimensional Signals*, Geometric Computing with Clifford Algebras: Theoretical Foundations and Applications in Computer Vision and Robotics (red. G. Sommer), Springer, 2001, s. 187–207.

- 
- [21] T. Cai, A. Zhang, *Sharp RIP bound for sparse signal and low-rank matrix recovery*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **35** (2013), nr 1, 74–93.
- [22] E. J. Candès, *The restricted isometry property and its implications for compressed sensing*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **346** (2008), nr 9-10, 589–592.
- [23] E. J. Candès, J. Romberg,  *$\ell_1$ -magic: Recovery of Sparse Signals via Convex Programming*, Caltech, 2005.
- [24] E. J. Candès, J. Romberg, *Quantitative Robust Uncertainty Principles and Optimally Sparse Decompositions*, Found. Comput. Math., **6** (2006), nr 2, 227–254.
- [25] E. J. Candès, J. Romberg, T. Tao, *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*, IEEE Trans. Inform. Theory, **52** (2006), nr 2, 489–509.
- [26] E. J. Candès, J. Romberg, T. Tao, *Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements*, Comm. Pure Appl. Math., **59** (2006), nr 8, 1207–1223.
- [27] E. J. Candès, T. Tao, *Decoding by linear programming*, IEEE Trans. Inform. Theory, **51** (2005), nr 12, 4203–4215.
- [28] E. J. Candès, T. Tao, *Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?*, IEEE Trans. Inform. Theory, **52** (2006), nr 12, 5406–5425.
- [29] P. Cerejeiras, Q. Chen, N. Gomes, S. Hartmann, *Compressed Sensing with Nonlinear Fourier Atoms* Modern Trends in Hypercomplex Analysis (red. S. Bernstein, U. Kähler, I. Sabadini, F. Sommen), Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2016, s. 47–77.
- [30] P. Chareka, O. Chareka, S. Kennedy, *Locally sub-Gaussian random variables and the strong law of large numbers*, Atl. Electron. J. Math., **1** (2006), nr 1, 75–81.
- [31] V. M. Chernov, *Discrete orthogonal transforms with data representation in composition algebras*, Proc. 9th SCIA, Uppsala, Szwecja, 1995, s. 357–364.
- [32] A. Cohen, W. Dahmen, R. DeVore, *Compressed sensing and best  $k$ -term approximation*, J. Amer. Math. Soc., **22** (2009), 211–231.
- [33] C. M. Davenport, *A Commutative hypercomplex algebra with associated function theory*, Clifford Algebras with Numeric and Symbolic Computations (red. R. Ablamowicz, J. Parra, P. Lounesto), Birkhäuser Mathematics, 1996, s. 213–227.
- [34] M. E. Davies, R. Gribonval, *Restricted Isometry Constants Where  $\ell^p$  Sparse Recovery Can Fail for  $0 < p \leq 1$* , IEEE Trans. Inform. Theory, **55** (2009), nr 5, 2203–2214.
- [35] M. A. Delsuc, *Spectral representation of 2D NMR spectra by hypercomplex numbers*, J. Magn. Reson., **77** (1988), nr 1, 119–124.
- [36] R. A. DeVore, *Nonlinear approximation*, Acta Numer., **7** (1988), 51-150.
- [37] L. E. Dickson, *On Quaternions and Their Generalization and the History of the Eight Square Theorem*, Ann. Math., **20** (1919), nr 3, 155–171.
- [38] D. L. Donoho, *Compressed sensing*, IEEE Trans. Inform. Theory, **52** (2006), nr 4, 1289–1306.
- [39] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, 2001.
- [40] J. Ebling, G. Scheuermann, *Clifford Fourier transform on vector fields*, IEEE Trans. Vis. Comput. Graph., **11** (2005), nr 4, 469–479.
- [41] J. Ebling, G. Scheuermann, *Clifford convolution and pattern matching on vector fields*, Proc. IEEE VIS, vol. 3, 2003, s. 193–200.
- [42] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, R. Tibshirani, *Least angle regression*, Ann. Statist. **32** (2004), nr 2, 407–499.



- [43] T. A. Ell, *Hypercomplex Spectral Transformations*, rozprawa doktorska, University of Minnesota, 1992.
- [44] T. A. Ell, *Quaternion-Fourier transforms for analysis of 2-dimensional linear time-invariant partial-differential systems*, Proc. 32nd IEEE Conf. on Decision and Control, nr 1–4, 1993, s. 1830–1841.
- [45] T. A. Ell, *Hypercomplex Fourier Transforms of Color Images*, IEEE Trans. Image Process., **16** (2007), nr 1, 22–35.
- [46] T. A. Ell, N. Le Bihan, S. J. Sangwine, *Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing*, ISTE Ltd & John Wiley & Sons, Inc., 2014.
- [47] R. R. Ernst, W. P. Aue, P. Bachmann, J. Karhan, A. Kumar, L. Müller, *Two-dimensional NMR spectroscopy*, Proc. 4th Ampère Int. Summer School, Pula, Yugoslavia, 1976.
- [48] R. R. Ernst, G. Bodenhausen, A. Wokaun, *Principles of Nuclear Magnetic Resonance in One and Two Dimensions*, International Series of Monographs on Chemistry. Oxford University Press, 1987.
- [49] M. I. Falcão, G. Miranda, *Quaternions: A Mathematica Package for Quaternionic Analysis* Lect. Notes Comput. Sc. **6784** (2011), 200–214.
- [50] M. Felsberg, *Low-Level Image Processing with the Structure Multivector*, rozprawa doktorska, Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Christian-Albrechts-Universität Kiel, 2002.
- [51] M. Felsberg, T. Bülow, G. Sommer, *Commutative Hypercomplex Fourier Transforms of Multidimensional Signals*, Geometric Computing with Clifford Algebras: Theoretical Foundations and Applications in Computer Vision and Robotics (red. G. Sommer), Springer, 2001, s. 209–229.
- [52] S. Foucart, M.-J. Lai, *Sparsest solutions of underdetermined linear systems via  $\ell_q$ -minimization for  $0 < q \leq 1$* , Appl. Comput. Harmon. Anal., **26** (2009), nr 3, 395–407.
- [53] S. Foucart, H. Rauhut, *A mathematical introduction to compressive sensing*, Birkhäuser/Springer, 2013.
- [54] N. Gomes, *Compressive Sensing in Clifford Analysis*, rozprawa doktorska, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2015.
- [55] N. Gomes, S. Hartmann, U. Kähler, *Compressed Sensing for Quaternionic Signals*, Complex Anal. Oper. Theory **11** (2017), 417–455.
- [56] S. L. Hahn, *Amplitudes, phases and complex frequencies of 2-D Gaussian signals*, Bull. Polish Ac. Sci. Tech. Sci., **40** (1992), nr 3, 289–311.
- [57] S. L. Hahn, *Hilbert Transforms in Signal Processing*, Artech House, Inc., 1996.
- [58] S. L. Hahn, K. M. Snopek, *Complex and Hypercomplex Analytic Signals: Theory and Applications*, Artech House Boston—London, 2016.
- [59] S. L. Hahn, K. M. Snopek, *The Unified Theory of Complex and Hypercomplex Analytic Signals*, Internal Report of the Institute of Radioelectronics, (2010) nr 1.
- [60] S. L. Hahn, K. M. Snopek, *The Unified Theory of  $n$ -Dimensional Complex and Hypercomplex Analytic Signals*, Bull. Polish Ac. Sci., Tech. Sci., **59** (2011), nr 2, 167–181.
- [61] S. L. Hahn, K. M. Snopek, *Various Approaches to the Theory of Complex and Hypercomplex Analytic Signals*, Internal Report of the Institute of Radioelectronics, (2010), nr 2.
- [62] M. B. Hawes, W. Liu, *A Quaternion-Valued Reweighted Minimisation Approach to Sparse Vector Sensor Array Design*, Proc. 19th International Conference on Digital Signal Processing, (2014), 426–430.
- [63] E. Hitzer, *Introduction to Clifford’s geometric algebra*, Journal of SICE, **51** (2012), nr 4, 338–350.
- [64] E. Hitzer, *The Clifford Fourier transform in real Clifford algebras* Proc. 19th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering (red. K. Guerlebeck, T. Lahmer, F. Werner), 2012.

- 
- [65] B. Huang, *A revisit of the unique polar representation of the Vector-valued Hyperanalytic Signal*, 2015 23rd EUSIPCO, (2015), 1172–1176.
- [66] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script Warszawa, 2010.
- [67] O. James, *On the RIP of Real and Complex Gaussian Sensing Matrices via RIV framework in Sparse Signal Recovery Analysis*, IEEE sponsored 2nd International Conference on Electronics and Communications System, (2015), 1–5.
- [68] O. James, *Revisiting the RIP of Real and Complex Gaussian Sensing Matrices Through RIV Framework*, Wireless Pers. Commun., **87** (2016), nr 2, 513–526.
- [69] O. James, H.-N. Lee, *Restricted Isometry Random Variables: Probability Distributions, RIC Prediction and Phase Transition Analysis for Gaussian Encoders*, (2015), arXiv:1410.1956v4.
- [70] B. Kashin, *The widths of certain finite dimensional sets and classes of smooth functions*, Izvestia **41** (1977), 334–351.
- [71] K. Kurman, *Liczby podwójne zespolone i możliwość ich zastosowania*, Politechnika Warszawska, Katedra Automatyki i Telemekhaniki, 1958.
- [72] N. Le Bihan, *The geometry of proper quaternion random variables*, Signal Processing, **138** (2017), 106–116.
- [73] F. Leja, *Funkcje zespolone*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [74] B. Mawardi, E. Hitzer, *Clifford Fourier transformation and uncertainty principle for the Clifford algebra  $\mathcal{Cl}_{3,0}$* , Adv. Appl. Clifford Algebr., **16** (2006), nr 1, 41–61.
- [75] A. J. Miller, *Subset Selection in Regression*, wyd. 2, Chapman and Hall, London, 2002.
- [76] J. P. Morais, S. G. Georgiev, W. Sprößig, *Real Quaternionic Calculus Handbook*, Birkhäuser, 2014.
- [77] A. Pinkus,  *$n$ -widths and Optimal Recovery in Approximation Theory*, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics (red. D. de Boor), vol. 36, American Mathematical Society, Providence, 1986.
- [78] A. Pinkus,  *$n$ -widths in Approximation Theory*, Springer-Verlag, 1985.
- [79] L. Rodman, *Topics in Quaternion Algebra*, Princeton University Press, 2014.
- [80] W. Rządkowski, K. M. Snopek, *A New Quaternion Color Image Watermarking Algorithm*, Proc. 8th IEEE Int. Conf. on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Application, 2016.
- [81] S. J. Sangwine, *Colour image edge detector based on quaternionic convolution*, Electronics Letters, **34** (1989), nr 10, 969–971.
- [82] S. J. Sangwine, *Fourier transforms of colour images using quaternion, or hypercomplex, numbers*, Electronics Letters, **32** (1996), nr 21, 1979–1980.
- [83] S. J. Sangwine, T. A. Ell, *The discrete Fourier transform of a colour image*, Proc. 2nd IMA Conference on Image Processing (red. J. M. Blackledge, M. J. Turner), Image Processing II Mathematical Methods, Algorithms and Applications, 1998, s. 430–441.
- [84] S. J. Sangwine, N. Le Bihan, *Quaternion Toolbox for Matlab<sup>®</sup>, Version 2 with support for Octonions*, Software Library, 2013, online 12.04.2017: <http://qtfm.sourceforge.net>.
- [85] K. M. Snopek, *New Hypercomplex Analytic Signals and Fourier Transforms in Cayley-Dickson Algebras*, Electronics and Telecommunications Quarterly, **55** (2009), nr 3, 403–415.
- [86] K. M. Snopek, *Quaternions and octonions in signal processing – fundamentals and some new results*, Telecommunication Review + Telecommunication News, Tele-Radio-Electronic, Information Technology, **6** (2015), 618–622.
- [87] K. M. Snopek, *Studies on Complex and Hypercomplex Multidimensional Analytic Signals*, Zeszyty naukowe serii Elektronika, z. 190, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2013.

- [88] K. M. Snopek, *The  $n$ -D Analytic Signals and Fourier Spectra in Complex and Hypercomplex Domains*, Proc. 34th Int. Conf. on Telecommunications and Signal Processing, Budapest, (2011), 423–427.
- [89] K. M. Snopek, *The Study of Properties of  $n$ -D Analytic Signals in Complex and Hypercomplex Domains* Radioengineering, **21** (2012), nr 2, 29–36.
- [90] J. F. Sturm, *Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones*, Optimization Methods and Software, **11** (1999) nr 1-4, 625–653.
- [91] B. W. Szabat, *Wstęp do analizy zespolonej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1974.
- [92] J. Szabatin, *Podstawy teorii sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2003.
- [93] J. F. Traub, H. Woziakowski, *A General Theory of Optimal Algorithms*, Academic Press, Nowy Jork 1980.
- [94] D. S. Taubman, M. W. Marcellin, *JPEG 2000: Image Compression Fundamentals, Standards and Practice*, The Springer International Series in Engineering and Computer Science, vol. 642, Springer, 2002.
- [95] V. N. Temlyakov, *Nonlinear methods of approximation*, Found. Comput. Math. **3** (2003), 33–107.
- [96] R. Tibshirani, *Regression shrinkage and selection via the lasso*, J. Royal. Statist. Soc. B., **58** (1996), 267–288.
- [97] N. N. Vakhania, G. Z. Chelidze, *Quaternion Gaussian random variables*, Teor. Veroyatn. Primen., **54** (2009), nr 2, 337–344 (po rosyjsku); tłumaczenie w Theory Probab. Appl., **54** (2010), nr, 363–369.
- [98] B. L. van der Waerden., *Hamilton's Discovery of Quaternions*, Math. Magazine, **49** (1976), nr 5, 227–236.
- [99] M. Wainwright, *Basic tail and concentration bounds*, High-dimensional statistics: A non-asymptotic viewpoint (red. M. Wainwright), manuskrypt, 2016.
- [100] J. Wu, X. Zhang, X. Wang, L. Senhadji, H. Shu,  *$L1$ -norm minimization for quaternion signals*, Journal of Southeast University, **1** (2013), 33–37.
- [101] K. Xu, J. Wang, B. Shim, *The RIP for Random Matrices with Complex Gaussian Entries*, Future Information Technology (red. J. J. Park, I. Stojmenovic, M. Choi, F. Xhafa), 2013, s. 13–19.
- [102] F. Zhang, *Quaternions and Matrices of Quaternions*, Linear Algebra Appl., **251** (1997), 21–57.



## Skorowidz

- algebra alternatywna, 28
- algebra Cayleya-Dicksona, **26**, 32, 74, 122
- algebra Clifforda, **14**, 73
- algebra elastyczna, 28
  
- funkcja autokorelacji
  - klasyczna, 96
  - rozszerzona, 98–100
- funkcja Gaussa, **79**, 82
- funkcja wykładnicza, 31
  - argumentu kwaternionowego, 16, 17
  - argumentu oktonionowego, 31
  
- hermitowska symetria
  - OFT, 85–87
  - QFT, 85
  - klasycznej transformacji Fouriera, 85
  
- iloczyn skalarny w  $\mathbb{H}^n$ , **19**, 41, 42, 45, 53
  
- kwaternionowa losowa macierz gaussowska, 49,  
51, 52, 54–57, 63
- kwaternionowa przestrzeń wektorowa, 19
- kwaternionowa zmienna losowa, 49
- kwaterniony, **14**, 13–24
  - część rzeczywista i urojona, 14
  - czysty kwaternion, 14
  - element odwrotny, 16
  - kwaternion jednostkowy, 15
  - lewe i prawe dzielenie, 16
  - norma kwaternionowa, 15, 16
  - postać trygonometryczna, 17
  - postać wykładnicza, 17, 42
  - równoważność kwaternionów, 21
  - reguły mnożenia, 13
  - sprzężenie kwaternionowe, 15, 16
  
- liczby poczwórne zespolone, **107**, 108, 110–113,  
124
- liczby podwójne zespolone, **71**, 107
  
- minimalizacja  $\ell_0$ , 36
- minimalizacja  $\ell_1$ , 36, 37, 40, 44, 47, 58
  
- najlepsze rzadkie przybliżenie wektora, 44, 60
- nierówność Cauchy’ego-Schwarza, **20**, 45, 46
- nośnik wektora, **23**, 40
- norma  $\ell_0$ , **23**, 40
- norma  $\ell_p$ , 19, **22**
- norma operatorowa, **23**, 41, 52–54
  
- OFT, *zob.* transformacja Fouriera oktonionowa  
oktonionowa charakterystyka częstotliwościowa,  
109
- oktoniony, **26**, 25–31, 122–125
  - część rzeczywista i urojona, 27
  - czysty oktonion, 27
  - element odwrotny, 28
  - lewe i prawe dzielenie, 29
  - norma oktonionowa, 27
  - oktonion jednostkowy, 27
  - postać trygonometryczna, 30
  - postać wykładnicza, 31, 81
  - reguły mnożenia, 25
  - sprzężenie oktonionowe, 27
- oszczędne próbkowanie, 35
  
- połączenie systemów
  - równoległe, 110
  - szeregowo, 110
  - ze sprzężeniem zwrotnym, 111
  
- QFT, *zob.* transformacja Fouriera  
kwaternionowa

- równość polaryzacyjna, **20**, 42
- RIP, *zob.* własność ograniczonej izometrii
- rozkład
- $\chi^2$ , 48
  - gamma, **48**, 50, 51, 120
  - lokalnie podgaussowski, *zob.* rozkład podwykładniczy
  - normalny
    - – kwaternionowy, 49
    - – wielowymiarowy, 49
  - normalny (Gaussa), 48
  - podwykładniczy, **49**, 51, 119–121
- splot funkcji, 105
- stała ograniczonej izometrii, 37, **40**, 41, 42, 45–47, 54–57
- sygnał rzadki, *zob.* wektor rzadki
- transformacja Fouriera
- dyskretna, 35, 36
  - dyskretna kwaternionowa, 63
  - klasyczna, 69, 76, 82, 105
  - kwaternionowa, 69–72, 79
  - oktonionowa, **75**, 75–114
  - oktonionowa ciągu, 114
  - w sensie Cayleya-Dicksona, 74
  - w sensie Clifforda, 73
- twierdzenie
- Gershgorina o dysku, 41
  - Kotelnikowa-Shannona o próbkowaniu, 34
  - Plancherela, 92, 93
  - Rayleigha, 93
  - Wienera-Chinczyna, 97, 99
  - całkowite Fouriera, 76
  - o dualności splotu i mnożenia, 105, 109
  - o modulacji, 88–91
  - o przekształceniu afinicznym, 87
  - o przesunięciu, 91, 113
  - o stabilnej rekonstrukcji wektorów z danych pomiarowych, 37, **44**, 47
  - o transformacie pochodnych cząstkowych, 103–104, 112
- własność ograniczonej izometrii, 37, **40**, 43–47, 50, 54
- wartości własne macierzy, **21**, 22–24, 41
- wektor rzadki, 34, **40**, 56
- widmo gęstości energii
- klasyczne, 97
  - oktonionowe, 97
- widmo oktonionowe, 81, 86, 95
- zasada jednostajnej nieoznaczoności, 36

## Spis symboli

$\mathbb{H}$	algebra kwaternionów, 13
$\mathbb{R}$	ciało liczb rzeczywistych, 13
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	jednostki urojone w algebrze $\mathbb{H}$ , 13
$\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$	$2^{p+q}$ -wymiarowa algebra Clifforda nad $\mathbb{R}$ , 14
$\delta_{ij}$	delta Kroneckera, 14
$\operatorname{Re}(q)$	część rzeczywista kwaternionu $q$ , 14
$\operatorname{Im}(q)$ lub $\mathbf{q}$	część urojona kwaternionu $q$ , 14
$\bar{q}$	sprzężenie kwaternionu $q$ , 15
$ q $	norma kwaternionu $q$ , 15
$\mathbb{H}^n$	$n$ -wymiarowa kwaternionowa przestrzeń wektorowa, 19
$\mathbf{A}^T$	transpozycja macierzy $\mathbf{A}$ , 19
$\mathbf{A}^*$	hermitowskie sprzężenie macierzy $\mathbf{A}$ , 19
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	iloczyn skalarny wektorów w $\mathbb{H}^n$ , 19
$\ \cdot\ _p$	norma $\ell_p$ , 22
$\operatorname{supp} \mathbf{x}$	nośnik wektora $\mathbf{x}$ , 23
$\#A$	liczność (moc) zbioru $A$ , 23
$\ \mathbf{x}\ _0$	liczność nośnika wektora $\mathbf{x}$ , 23
$\ \mathbf{A}\ _{p \rightarrow q}$	norma operatorowa przekształcenia $\mathbf{A}$ między $\ell_p$ i $\ell_q$ , 23
$\mathbb{O}$	algebra oktonionów, 26
$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7$	jednostki urojone w algebrze $\mathbb{O}$ , 26
$\mathbb{C}$	ciało liczb zespolonych, 26
$\operatorname{Re}(o)$	część rzeczywista oktonionu $o$ , 27
$\operatorname{Im}(o)$ lub $\mathbf{o}$	część urojona oktonionu $o$ , 27
$\bar{o}$	sprzężenie oktonionu $o$ , 27
$ o $	norma oktonionu $o$ , 27
$\mathcal{F}_{\text{CFT}}\{u\}$	klasyczna transformata Fouriera funkcji $u$ , 69
$\mathbb{E}$	algebra liczb podwójnych zespolonych, 71
$\otimes$	mnożenie w algebrze $\mathbb{E}$ , 71
$\mathcal{F}_{\text{QFT}}\{u\}$	kwaternionowa transformata Fouriera funkcji $u$ , 72

---

$\mathcal{F}_{Cl-FT} \{u\}$	transformata Fouriera w sensie Clifforda funkcji $u$ , 73
$\mathcal{F}_{CD-FT} \{u\}$	transformata Fouriera w sensie Cayleya-Dicksona funkcji $u$ , 74
$\mathcal{F}_{OFT} \{u\}$	oktonionowa transformata Fouriera funkcji $u$ , 75
$(\cdot, \cdot)$	iloczyn skalarny funkcji w $\mathbb{R}^n$ , 92
$\ \cdot\ _{L^2(\mathbb{R}^3)}$	norma $L^2$ na $\mathbb{R}^3$ , 93
$R_u$	klasyczna funkcja autokorelacji sygnału $u$ , 96
$S_u$	klasyczne widmo gęstości energii sygnału $u$ , 97
$S_{OFT,u}$	oktonionowe widmo gęstości energii sygnału $u$ , 97
$R_{OFT,u}$	rozszerzona funkcja autokorelacji sygnału $u$ , 98
$u * v$	splot funkcji $u$ i $v$ , 105
$\mathbb{F}$	algebra liczb poczwórnych zespolonych, 107
$\odot$	mnożenie w algebrze $\mathbb{F}$ , 107