



POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ MATEMATYKI
I NAUK INFORMACYJNYCH



PRACA DYPLOMOWA LICENCJACKA

MATEMATYKA

**PODSTAWY TEORII
OSZCZĘDNEGO PRÓBKOWANIA**

COMPRESSED SENSING
- THEORETICAL PRELIMINARIES

AUTOR:

ŁUKASZ BŁASZCZYK

PROMOTOR:

DR AGNIESZKA BADEŃSKA

WARSZAWA, CZERWIEC 2014

.....

podpis promotora

.....

podpis autora

Streszczenie

Ze względu na ograniczenia fizyczne i możliwości obliczeniowe, proces akwizycji danych pomiarowych jest w wielu przypadkach (np. w tomografii rezonansu magnetycznego) bardzo czasochłonny. Klasyczna teoria próbkowania, bazująca na twierdzeniu Shannona, niewiele może poprawić. Nowa teoria, zainspirowana przez prace Candès, Romberga i Tao, wykorzystuje fakt, że sygnały z jakimi mamy często do czynienia to sygnały rzadkie (w pewnej reprezentacji). Teoria ta, nazywana oszczędnym próbkowaniem, pokazuje, że sygnały rzadkie mogą być zrekonstruowane z niewielkiej ilości pomiarów, na przykład przy pomocy nieliniowych algorytmów rekonstrukcji (takich jak minimalizacja normy ℓ_1).

Tematem niniejszej pracy są matematyczne podstawy teorii oszczędnego próbkowania. Podane zostaną najważniejsze pojęcia i własności, a także warunki, jakie muszą spełniać schematy pomiarowe i algorytmy rekonstrukcji, by możliwe było odzyskanie danych. Pokażemy także przykład konkretnego schematu pomiarowego (Fourierowskiego), który te warunki spełnia i wskażemy możliwe zastosowania tej teorii (np. w diagnostyce medycznej).

Zaprezentujemy również własną implementację jednego z algorytmów, pokazującą, że metoda rzeczywiście działa, nie tylko na danych symulacyjnych, ale także na danych pochodzących z rzeczywistych pomiarów, tzn. z tomografii rezonansu magnetycznego.

Summary

Due to physical restrictions and computing capabilities, measurements acquisition process is in many cases (i.e. in magnetic resonance tomography) very time consuming. Classical sampling theory, based of Shannon Sampling Theorem, is not very helpful. Recent theory, inspired by the works of Candès, Romberg and Tao, utilizes the fact, that the real-life signals are usually sparse (in some representation). This theory, called compressed sensing, shows that sparse signals can be recovered from a small number of measurements by using nonlinear reconstruciotn algorithms (i.e. ℓ_1 -norm minimization).

Throughout this paper, we will outline the mathematical preliminaries of compressed sensing theory. Main definitions and most important properties will be shown, that allow us to recover sparse signals in stably way. An example will be defined (Fourier sampling scheme), than obeys all the necessary properties, and possible applications were shown (i.e. medical imaging).

We will also present a self-made implementation of described algorithm. It shows that described method really works, not only on simulated data, but also on real data acquired from magnetic resonance imaging.

Składam serdeczne podziękowania dr Agnieszce Badeńskiej za wsparcie merytoryczne i organizacyjne okazane przy powstawaniu tej pracy.

Spis treści

1	Wstęp - sformułowanie problemu i definicje	1
1.1.	Wprowadzenie	1
1.2.	Pojęcie rzadkości i kompresowalności	4
1.3.	Minimalizacja normy ℓ_0 i podstawowe własności	5
2	Własność jądra	9
2.1.	Definicja i warunki równoważne	10
2.2.	Jednoznaczność rozwiązania problemu	12
2.3.	Równoważność minimalizacji w normie ℓ_0 i ℓ_1	14
3	Własność ograniczonej izometrii	15
3.1.	Definicja, podstawowe własności	16
3.2.	Stabilna rekonstrukcja z zaszumionych danych	17
3.3.	Uwagi	22
4	Przykład macierzy pomiarowej	23
4.1.	Dyskretna transformata Fouriera	23
4.2.	Spełnienie założeń stabilnej rekonstrukcji	25
5	Zastosowania	27
5.1.	Prosty eksperyment numeryczny	27
5.2.	Tomografia rezonansu magnetycznego	31
5.3.	Eksperyment na danych pomiarowych	33
5.4.	Podstawowe problemy praktyczne	37
6	Podsumowanie i wnioski	39
	Bibliografia	40

Rozdział 1

Wstęp - sformułowanie problemu i definicje

1.1. Wprowadzenie

W wielu zadaniach praktycznych wykorzystuje się pomiary pewnych wielkości do wyciągania wniosków na temat różnych obiektów. W przetwarzaniu sygnałów i obrazów pojawia się w związku z tym problem rekonstrukcji sygnału z danych pomiarowych. W szczególności warto zwrócić uwagę na tomografię komputerową (zarówno rentgenowską jak i rezonansu magnetycznego), gdzie na podstawie zebranych danych (z detektorów promieniowania lub cewek odbiorczych) można odtworzyć rozkład pewnego parametru fizycznego wewnątrz ludzkiego ciała.

Zazwyczaj proces akwizycji danych jest liniowy, co sprowadza zadanie rekonstrukcji sygnału do rozwiązania układu równań liniowych. Formalizując ten problem, wektor zaobserwowanych danych $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ jest związany z badanym sygnałem $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ równaniem

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}, \tag{1.1}$$

gdzie macierz $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ modeluje liniowy proces pomiarowy. Chcąc uzyskać informacje na temat sygnału \mathbf{x} , musimy rozwiązać powyższy układ równań. Z algebry liniowej wiadomo, że jest to możliwe tylko gdy liczba pomiarów m będzie co najmniej równa długości badanego sygnału n (zakłada się, że pomiar nie dostarczy sprzecznych informacji). Jest to

podejście naturalne, stosowane w większości współczesnych zastosowań, na przykład w obrazowaniu medycznym. Wiemy również, że gdy $m < n$, wówczas jeśli układ równań (1.1) będzie miał przynajmniej jedno rozwiązanie, będzie miał ich nieskończenie wiele. Niemożliwe jest zatem jednoznaczne zrekonstruowanie wektora \mathbf{x} z danych \mathbf{y} . Jest to również podstawa klasycznej teorii próbkowania, bazującej na sformułowanym poniżej Twierdzeniu Kotielnikowa-Shannona o próbkowaniu.

Zajmijmy się przez chwilę przypadkiem sygnału $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Widmem $X(\omega)$ takiego sygnału będziemy nazywać jego transformatę Fouriera

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i\omega t} dt, \quad (1.2)$$

o ile istnieje. Pojęcie widma wprowadza się dla sygnałów całkownych, ale rozszerza się na sygnały całkowne z kwadratem oraz na niektóre sygnały, które nie mają transformaty w sensie powyższej całki (np. sygnał stały, sygnały okresowe, czy też sygnały dystrybucyjne). Stosuje się wtedy tzw. transformatę Fouriera w sensie granicznym [17]. Z punktu widzenia teorii próbkowania będą nas interesować jedynie sygnały, których widmo ma ograniczony nośnik. Definiuje się dla nich częstotliwość graniczną jako najmniejszą liczbę f_{max} taką, że $X(\omega) = 0$ dla $|\omega| \geq \omega_{max} = 2\pi f_{max}$. Przypuśćmy, że sygnał $x(t)$ jest próbkowany z okresem T_s (lub częstotliwością $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$), tzn. mierzone są jego wartości w punktach $t = kT_s$, $k \in \mathbb{Z}$. Zachodzi wówczas Twierdzenie Kotielnikowa-Shannona [17], przytoczone poniżej.

Twierdzenie 1.1 (Kotielnikowa-Shannona). *Jeżeli widmo $X(\omega)$ sygnału $x(t)$ spełnia warunek $X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| \geq \omega_{max}$, to sygnał ten można odtworzyć z pełną dokładnością na podstawie jego próbek pobieranych z okresem*

$$T_s \leq \pi/\omega_{max}. \quad (1.3)$$

Powyzszy warunek jest nazywany warunkiem Nyquista. Najmniejsza częstotliwość $f_s = 2f_{max}$, przy której jest spełniony, nazywana jest częstotliwością Nyquista.

Warto zauważyć, że w sytuacjach praktycznych rzadko mamy do czynienia z sygnałami, których widmo ma ograniczony nośnik. Ze względów technologicznych stosuje się wówczas proces tzw. filtracji, która ogranicza nośnik widma sygnału. W dalszej części pracy będziemy

rozważać jedynie sygnały dyskretne (tzn. ciągi), zakładając że jeśli są to pomiary pewnych wielkości ciągłych, to spełniają one przytoczony wyżej warunek Nyquista.

Na uwagę zasługuje również fakt, że większość sygnałów jakie obserwuje się w rzeczywistości, to tzw. sygnały *kompresowalne*, to znaczy takie, w których większość informacji jest skupiona na niewielkiej ilości współrzędnych. Klasycznym przykładem jest tutaj przetwarzanie obrazów i reprezentacja falkowa. Rekonstruując obraz z zaledwie 1% największych co do modułu współczynników reprezentacji falkowej (tzn. zastępując 99% współczynników zerami) ludzkie oko najczęściej nie zaobserwuje żadnej utraty informacji. Jest to główna przyczyna sukcesu, jaki odnoszą wspólnie wszelkie techniki kompresji (takie jak JPEG, MPEG czy MP3). Podobną sytuację obserwuje się w obrazowaniu medycznym.

Powyższe własności sygnałów sprawiły, że w ostatnich latach zaczęto zadawać sobie pytanie - czy konieczne jest zbieranie tak dużej ilości informacji, by zrekonstruować sygnał, którego większość współczynników w pewnej bazie można odrzucić bez zauważalnej utraty jakości? Było to inspiracją do stworzenia teorii *oszczędnego próbkowania* (ang. *compressed sensing, compressive sampling*), w której łączy się teorię akwizycji sygnałów (czyli teorię próbkowania) z teorią kompresji. Jej powstanie należy przypisać Emmanuelowi Candèsowi, który wraz z Justinem Rombergiem opisał specjalne własności, jakie muszą spełniać macierze pomiarowe, by możliwa była rekonstrukcja pewnej klasy sygnałów z niewielkiej ilości danych [7]. Już od momentu powstania, dziedzina ta dynamicznie się rozwija i coraz większe grono zarówno matematyków jak i inżynierów rozbudowuje tę teorię.

Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie matematycznych podstaw stojących za teorią oszczędnego próbkowania. Wskazane zostaną podstawowe definicje i własności, które gwarantują wierną rekonstrukcję pewnych klas sygnałów. Uwaga zostanie skupiona na przypadku *sygnałów rzadkich* i dwóch własnościach macierzy pomiarowych, których spełnienie gwarantuje jednoznaczną rekonstrukcję tych sygnałów z niewielkiej ilości danych pomiarowych, tzn. na *własności jądra* (NSP) i *własności ograniczonej izometrii* (RIP). Wskazany zostanie również przykład konkretnej macierzy pomiarowej, która te własności spełnia, tzn. *macierz współczynników dyskretnej transformacji Fouriera*. Pracę podsumuje przykład praktycznego wykorzystania omawianej teorii do zadania, które zainspirowało jej powstanie, tzn. do rekonstrukcji obrazu w *tomografii rezonansu magnetycznego*.

1.2. Pojęcie rzadkości i kompresowalności

Od tego momentu będziemy zajmować się jedynie skończonymi sygnałami dyskretnymi, tzn. wektorami $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Podstawowym pojęciem, jakie należy wprowadzić, jest pojęcie *nośnika sygnału* oraz *sygnału rzadkiego*, czy też *kompresowalnego*.

Definicja 1.1. *Nośnikiem* sygnału $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ nazywamy zbiór indeksów niezerowych współrzędnych tego wektora, tzn.

$$\text{supp } \mathbf{x} := \{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0\}. \quad (1.4)$$

W dalszej części pracy będziemy stosować następującą notację

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \#(\text{supp } \mathbf{x}), \quad (1.5)$$

gdzie $\#A$ oznacza licznosc (moc) zbioru A . Będziemy też często nazywać powyższą wielkość *normą* ℓ_0 . Trzeba mieć na uwadze, że jest to nazwa zwyczajowa (nie jest to norma, ani nawet quasi-norma), która jednak ma swoje uzasadnienie. W przestrzeniach \mathbb{C}^n lub \mathbb{R}^n normę $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, definiuje się jako

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.6)$$

Dla $p \in (0, 1)$, funkcja $\|\cdot\|_p$ zdefiniowana powyższym wzorem jest quasi-normą (nie spełnia warunku trójkąta). Zauważmy, że zapisując powyższą definicję w postaci

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \quad (1.7)$$

i przechodząc do granicy $p \rightarrow 0$ otrzymujemy po prawej stronie powyższej równości moc nośnika sygnału \mathbf{x} . Aby być konsekwentnym, należałoby stosować notację $\|\mathbf{x}\|_0^0$, jednak przyjęło się pomijać 0 w indeksie górnym. W dalszej części pracy wielkości $\|\cdot\|_p$ będziemy nazywać *normami* ℓ_p .

Definicja 1.2. Sygnał $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ nazywamy *sygnałem s -rzadkim*, jeśli co najwyżej s jego współrzędnych jest niezerowych, tzn.

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq s. \quad (1.8)$$

Zbiór wszystkich sygnałów s -rzadkich będzie oznaczany symbolem Σ_s , tzn.

$$\Sigma_s := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{x}\|_0 \leq s\}. \quad (1.9)$$

W rzeczywistym świecie sygnałów rzadkich raczej się nie spotyka, za to bardzo częste są *sygnały kompresowalne*. W tym przypadku definicja nie jest jednoznaczna i różne źródła podają ją inaczej. Na potrzeby tej pracy wystarczy ta przytoczona poniżej.

Definicja 1.3. Sygnał $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ nazywamy *kompresowalnym*, jeśli moduły jego współczynników szybko maleją, tzn.

$$\exists C > 0 \exists q > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\} |x_{i:n}| \leq C \cdot i^{-q}, \quad (1.10)$$

gdzie zapis $x_{i:n}$ oznacza i -tą największą co do modułu współrzędną wektora \mathbf{x} .

1.3. Minimalizacja normy ℓ_0 i podstawowe własności

Należy sobie postawić teraz pytanie jaka jest minimalna liczba pomiarów m , która pozwoli na dokładną rekonstrukcję sygnału $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ z pomiarów

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x},$$

a także jakie są efektywne metody rekonstrukcji. Zauważmy najpierw, że prawdziwy jest pewien pożyteczny fakt, który stanowi podstawę całej teorii oszczędnego próbkowania [12].

W poniższym lemacie, jak i w dalszej części pracy, stosowana jest następująca notacja:

$$\arg \min_x f(x) = \{x : \forall_y f(y) \geq f(x)\}, \quad (1.11)$$

tzn. $\arg \min_x f(x)$ oznacza zbiór tych x , dla których funkcja f osiąga minimum.

Lemat 1.1. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ będzie sygnałem s -rzadkim i niech $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ będzie macierzą pomiarową. Ponadto, niech $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) wektor \mathbf{x} jest jedynym s -rzadkim rozwiązaniem problemu $\Phi \mathbf{z} = \mathbf{y}$, tzn.

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \Phi \mathbf{z} = \mathbf{y}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\},$$

(b) wektor \mathbf{x} jest jednoznacznym rozwiązaniem problemu minimalizacji ℓ_0 :

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{pod warunkiem} \quad \Phi \mathbf{z} = \mathbf{y}. \quad (P_0)$$

Dowód. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ będzie jedynym s -rzadkim rozwiązaniem problemu $\Phi \mathbf{z} = \mathbf{y}$. Wówczas rozwiązanie $\mathbf{x}^\#$ problemu (P_0) jest s -rzadkie i spełnia warunek $\Phi \mathbf{x}^\# = \mathbf{y}$, a zatem $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}$. Dowodzi to implikacji $(a) \Rightarrow (b)$. Implikacja przeciwna jest oczywista. \square

Pozostaje pytanie o najmniejszą liczbę pomiarów, która pozwoli na rekonstrukcję dowolnego s -rzadkiego wektora \mathbf{x} . Zostało to po raz pierwszy sformułowane w [11] w postaci twierdzenia przytoczonego poniżej.

Twierdzenie 1.2. *Niech $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Wówczas każdy s -rzadki wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ jest jedynym s -rzadkim rozwiązaniem problemu $\Phi \mathbf{z} = \Phi \mathbf{x}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy $2s$ -elementowy zbiór kolumn macierzy Φ jest liniowo niezależny.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że dla każdego $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ istnieje co najwyżej jeden $\mathbf{x} \in \Sigma_s$ taki, że $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$. Przypuśćmy jednak, że istnieje $2s$ -elementowy zbiór kolumn macierzy Φ , który jest liniowo zależny. Wówczas musi istnieć $\mathbf{h} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\}$ taki, że $\mathbf{h} \in \Sigma_{2s}$ i istnieją różne wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Sigma_s$ takie, że $\mathbf{h} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Otrzymujemy stąd, że $\Phi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ i stąd $\Phi \mathbf{x}_1 = \Phi \mathbf{x}_2$. Jest to jednak sprzeczność z jednoznacznością s -rzadkiego rozwiązania problemu $\Phi \mathbf{z} = \Phi \mathbf{x}_1$.

Niech teraz każdy $2s$ -elementowy zbiór kolumn Φ będzie liniowo niezależny. Przypuśćmy, że dla pewnego \mathbf{y} istnieją $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Sigma_s$ takie, że $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}_1 = \Phi \mathbf{x}_2$. Stąd $\Phi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$. Niech $\mathbf{h} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, wówczas $\Phi \mathbf{h} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{h} \in \Sigma_{2s}$, a ponieważ wszystkie $2s$ -elementowe zbiory kolumn Φ są liniowo niezależne, to $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Zatem $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, co kończy dowód twierdzenia. \square

Wniosek 1.1. *Liczba pomiarów m konieczna do rekonstrukcji dowolnego s -rzadkiego sygnału $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ z pomiarów $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ spełnia*

$$m \geq 2s. \quad (1.12)$$

Dowód. Z Twierdzenia 1.2 otrzymaliśmy warunek konieczny i wystarczający $\text{rank } \Phi \geq 2s$, gdzie $\text{rank } \mathbf{A}$ oznacza rząd macierzy \mathbf{A} . Z kolei z faktu, że $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$, dostajemy $m \geq \text{rank } \Phi$, co prowadzi do tezy. \square

Okazuje się, że istnieją macierze $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ takie, że dowolny s -rzadki sygnał $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ może być jednoznacznie zrekonstruowany z pomiarów $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ jako rozwiązanie problemu

(P_0), dla których nierówność we Wniosku 1.1 zamienia się w równość. Są to tzw. *macierze Vandermonde'a* [12].

Niech $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$ będą ustalone i parami różne. Rozważmy macierz $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m = 2s$,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{2s-1} & t_2^{2s-1} & \cdots & t_n^{2s-1} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

i niech $S = \{j_1, \dots, j_{2s}\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ będzie dowolnym zbiorem indeksów, $\#S = 2s$. Wówczas transpozycja macierzy Φ_S (tzn. macierzy Φ z pozostawionymi kolumnami o indeksach ze zbioru S) jest macierzą Vandermonde'a. Kolumny tej macierzy są liniowo niezależne (wyznacznik tak powstałej macierzy jest niezerowy), zatem na mocy Twierdzenia 1.2 każdy s -rzadki wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ może być zrekonstruowany z pomiarów $\mathbf{y} \in \Phi \mathbf{x}$ jako jednoznaczne rozwiązanie problemu minimalizacji ℓ_0 . Szczególnym przykładem macierzy Vandermonde'a jest macierz dyskretnej transformaty Fouriera, gdzie $t_\ell = e^{2\pi i(\ell-1)/n}$, $\ell \in \{1, \dots, n\}$, którą zajmujemy się pod koniec tej pracy.

Rozdział 2

Własność jądra

(ang. *null space property* - NSP)

Jak wykazaliśmy w poprzednim rozdziale, jednoznaczne zrekonstruowanie s -rzadkiego wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ z pomiarów $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, gdzie $m < n$, wymaga rozwiązania problemu minimalizacji ℓ_0 :

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{pod warunkiem} \quad \Phi \mathbf{z} = \mathbf{y}. \quad (P_0)$$

W praktycznych zastosowaniach dane pomiarowe nie są jednak dokładne, ale obarczone pewnym błędem $\mathbf{e} = \Phi \mathbf{x} - \mathbf{y}$, o którym zakładamy, że $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta$ dla pewnego ustalonego $\eta \geq 0$. Należy więc zmodyfikować nasz problem minimalizacji ℓ_0 do postaci

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|\Phi \mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta. \quad (P_{0,\eta})$$

Okazuje się jednak, że jest to problem NP-trudny [16].

Twierdzenie 2.1. *Dla dowolnego ustalonego $\eta \geq 0$, problem minimalizacji ℓ_0 ($P_{0,\eta}$), przy dowolnych ustalonych $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$, jest NP-trudny.*

Dla dowolnych $0 < p < 1$ zadanie minimalizacji ℓ_p również jest problemem NP-trudnym, jednak dla wartości $p = 1$, minimalizacja ℓ_1 staje się zadaniem optymalizacji wypukłej:

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \Phi \mathbf{z} = \mathbf{y}, \quad (P_1)$$

który jest dobrze poznany i daje się sprowadzić do zagadnienia optymalizacji liniowej. W dalszej części rozdziału podane zostaną warunki, jakie muszą spełniać macierze Φ , by możliwa

była dokładna (lub przybliżona) rekonstrukcja wektora rzadkiego $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ z danych pomiarowych $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$. W literaturze warunki te znane są pod nazwą *własności jądra* (ang. *null space property*).

2.1. Definicja i warunki równoważne

Zanim wprowadzimy odpowiednie definicje, należy ustalić notację. Niech $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ będzie zbiorem indeksów, ponadto $S^c = \{1, \dots, n\} \setminus S$. Wówczas dla $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ definiujemy wektor $\mathbf{x}|_S$ wzorem

$$(\mathbf{x}|_S)_i = \begin{cases} x_i & \text{gdy } i \in S, \\ 0 & \text{gdy } i \notin S. \end{cases} \quad (2.1)$$

Definicja 2.1. Macierz $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ spełnia *własność jądra* (ang. *null space property* - NSP) względem zbioru $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ jeśli dla dowolnego $\mathbf{x} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\}$ zachodzi

$$\|\mathbf{x}|_S\|_1 < \|\mathbf{x}|_{S^c}\|_1, \quad (2.2)$$

Macierz Φ spełnia *warunek jądra rzędu s* , jeśli spełnia warunek jądra względem dowolnego zbioru $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ takiego, że $\#S \leq s$.

Warto zauważyć, że sprawdzenie powyższego warunku dla dowolnego zbioru S takiego, że $\#S \leq s$ i dowolnego niezerowego wektora $\mathbf{x} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\}$ jest wymagające obliczeniowo. Istotnym uproszczeniem jest warunek równoważny, sformułowany w poniższym lemacie.

Lemat 2.1. *Dla dowolnego ustalonego $\mathbf{x} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\}$ warunek (2.2) jest spełniony dla dowolnego zbioru S takiego, że $\#S \leq s$, jeśli jest spełniony dla zbioru indeksów s największych co do modułu współrzędnych wektora \mathbf{x} .*

Dowód. Niech S' będzie zbiorem s największych co do modułu współrzędnych wektora \mathbf{x} i niech S będzie dowolnym podzbiorem $\{1, \dots, n\}$ takim, że $\#S \leq s$. Załóżmy, że (2.2) zachodzi dla wektora $\mathbf{x} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\}$ i zbioru S' . Wówczas

$$\|\mathbf{x}|_S\|_1 \leq \|\mathbf{x}|_{S'}\|_1 < \|\mathbf{x}|_{(S')^c}\|_1 \leq \|\mathbf{x}|_{S^c}\|_1,$$

co wynika z obserwacji, że $(S')^c$ jest zbiorem indeksów $n - s$ najmniejszych co do modułu współrzędnych \mathbf{x} i $\#(S')^c \leq \#S^c$. □

Definicję NSP można sformułować również w inny, wygodniejszy sposób, korzystający z definicji błędu najlepszego s -rzadkiego przybliżenia wektora.

Definicja 2.2. Niech $p > 0$ i $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Błędem (w sensie ℓ_p) najlepszego s -rzadkiego przybliżenia wektora \mathbf{x} nazywamy

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p = \inf_{\|\mathbf{z}\|_0 \leq s} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p, \quad (2.3)$$

tzn. najmniejszą odległość (w sensie normy ℓ_p) między wektorem \mathbf{x} a dowolnym wektorem s -rzadkim.

Zauważmy, że infimum w definicji jest osiągane przez s -rzadki wektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, którego niezerowe współrzędne są równe s największym co do modułu współrzędnym wektora \mathbf{x} (o indeksach ze zbioru $S \subseteq \{1, \dots, n\}$), niezależnie od wartości p . Wówczas $\sigma_s(\mathbf{x})_p = \|\mathbf{x}|_{S^c}\|_p$.

Lemat 2.2.A. Macierz $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ spełnia NSP względem zbioru $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ jeśli

$$\forall \mathbf{x} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\} \quad 2 \|\mathbf{x}|_S\|_1 < \|\mathbf{x}\|_1. \quad (2.4)$$

Lemat 2.2.B. Macierz $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ spełnia NSP rzędu s jeśli

$$\forall \mathbf{x} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \|\mathbf{x}\|_1 < 2\sigma_s(\mathbf{x})_1. \quad (2.5)$$

Dowód. Lemat 2.2.A wynika z dodania $\|\mathbf{x}|_S\|_1$ do obu stron nierówności (2.2) oraz faktu, że $\|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{x}|_S\|_1 + \|\mathbf{x}|_{S^c}\|_1$, natomiast Lemat 2.2.B otrzymuje się, wybierając S jako zbiór indeksów s największych co do modułu współrzędnych \mathbf{x} i dodając $\|\mathbf{x}|_{S^c}\|_1$ do obu stron nierówności (2.2). Teza wynika z Lematu 2.1. \square

W niektórych źródłach spotyka się inne sformułowanie NSP, w którym do warunku (2.2) wprowadzona jest stała $C > 0$. Wówczas mówi się, że macierz $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ spełnia własność jądra ze stałą C względem zbioru S , jeśli dla dowolnego $\mathbf{x} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\}$ zachodzi

$$\|\mathbf{x}|_S\|_1 < C \cdot \|\mathbf{x}|_{S^c}\|_1.$$

Pierwszy raz definicja NSP ze stałą $C > 1$ została użyta w postaci analogicznej do (2.5) przez Cohena w [10]:

$$\|\mathbf{x}\|_p < C \cdot \sigma_s(\mathbf{x})_p,$$

gdzie $p \geq 1$. Na potrzeby dalszych rozważań wystarczy jednak definicja przytoczona na początku rozdziału.

Wprowadzenie powyższych własności pozwala już na sformułowanie warunków jednoznacznej rozwiązywalności problemu (P_1) .

2.2. Jednoznaczność rozwiązania problemu

Lemat 2.3. *Niech $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $S \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dowolny wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ taki, że $\text{supp } \mathbf{x} = S$, jest jednoznacznym rozwiązaniem problemu (P_1) dla $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ wtedy i tylko wtedy, gdy Φ spełnia NSP względem zbioru S .*

Jeśli dopuścimy, by powyższy Lemat zachodził dla dowolnego zbioru S , otrzymamy następujący ogólniejszy wynik.

Twierdzenie 2.2. *Niech $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dowolny s -rzadki wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ jest jednoznacznym rozwiązaniem problemu (P_1) dla $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ wtedy i tylko wtedy, gdy Φ spełnia NSP rzędu s .*

Dowód Lematu 2.3. Załóżmy najpierw, że dowolny wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ taki, że $\text{supp } \mathbf{x} = S$ jednoznacznie minimalizuje normę $\|\cdot\|_1$ przy ograniczeniu $\Phi \mathbf{z} = \Phi \mathbf{x}$. Niech $\mathbf{x} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\}$. Wówczas, z założenia, wektor $\mathbf{x}|_S$ jednoznacznie minimalizuje $\|\cdot\|_1$ przy ograniczeniu $\Phi \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}|_S)$. Zauważmy, że

$$\mathbf{0} = \Phi \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}|_S + \mathbf{x}|_{S^c}) = \Phi(\mathbf{x}|_S) + \Phi(\mathbf{x}|_{S^c})$$

oraz $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = \mathbf{x}|_S + \mathbf{x}|_{S^c}$. Otrzymujemy zatem $\Phi(\mathbf{x}|_S) = \Phi(-\mathbf{x}|_{S^c})$ i $\mathbf{x}|_S \neq -\mathbf{x}|_{S^c}$. Z założenia o jednoznacznej minimalizacji normy $\|\cdot\|_1$, prowadzi to do wniosku, że $\|\mathbf{x}|_S\|_1 < \|\mathbf{x}|_{S^c}\|_1$ i dowodzi, że Φ spełnia NSP względem S .

Załóżmy teraz, że macierz Φ spełnia NSP względem zbioru S . Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ będzie taki, że $\text{supp } \mathbf{x} = S$. Ponadto, niech $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$, będzie dowolnym wektorem spełniającym $\Phi \mathbf{z} = \Phi \mathbf{x}$. Rozważając wektor $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \mathbf{z}$ i zauważając, że $\mathbf{v} \in \ker \Phi \setminus \{\mathbf{0}\}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_1 + \|\mathbf{z}\|_1 = \|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{z}\|_1 \stackrel{\text{NSP}}{<} \|\mathbf{v}|_{S^c}\|_1 + \|\mathbf{z}\|_1 \\ &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})|_{S^c}\|_1 + \|\mathbf{z}\|_1 = \|\mathbf{x}|_{S^c} - \mathbf{z}|_{S^c}\|_1 + \|\mathbf{z}\|_1 = \|-\mathbf{z}|_{S^c}\|_1 + \|\mathbf{z}\|_1 = \|\mathbf{z}\|_1, \end{aligned}$$

co daje wymaganą jednoznaczność minimalizacji przez \mathbf{x} . □

Twierdzenie 2.2 jest bezpośrednią konsekwencją powyższego Lematu. Zauważmy, że twierdzenie odpowiada sytuacji, w której uzyskaliśmy dokładne dane pomiarowe. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, w systemach rzeczywistych pomiary wykonywane są zazwyczaj z pewnym błędem. Podobnie jak w przypadku minimalizacji ℓ_0 , definiuje się zmodyfikowany problem minimalizacji ℓ_1 , dla ustalonego $\eta \geq 0$:

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|\Phi \mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta, \quad (P_{1,\eta})$$

gdzie η interpretuje się jako oszacowanie normy błędu pomiarowego $\mathbf{e} = \Phi \mathbf{x} - \mathbf{y}$, tzn. $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta$. Aby uzyskać wynik analogiczny do Twierdzenia 2.2, wprowadza się wzmocnioną wersję NSP.

Definicja 2.3. Macierz $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ spełnia *mocną własność jądra* (ang. *robust NSP*) względem zbioru $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ i normy $\|\cdot\|$ ze stałymi $0 < \rho < 1$ i $\tau > 0$ jeśli

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \quad \|\mathbf{x}|_S\|_1 < \rho \|\mathbf{x}|_{S^c}\|_1 + \tau \|\Phi \mathbf{x}\|. \quad (2.6)$$

Macierz Φ spełnia *mocny warunek jądra rzędu s* (względem normy $\|\cdot\|$) ze stałymi $0 < \rho < 1$ i $\tau > 0$, jeśli spełnia mocny warunek jądra ze stałymi ρ i τ względem dowolnego zbioru $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ takiego, że $\#S \leq s$.

Można teraz sformułować ogólny wynik, dający oszacowanie błędu rekonstrukcji dowolnego wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ z niedokładnych danych pomiarowych. Poniższe twierdzenie przytaczamy za [12].

Twierdzenie 2.3. Niech $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ spełnia *mocną NSP rzędu s* względem normy $\|\cdot\|_2$ ze stałymi $0 < \rho < 1$ i $\tau > 0$. Wówczas, dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, rozwiązanie $\mathbf{x}^\#$ problemu $(P_{1,\eta})$ przybliża wektor \mathbf{x} z błędem w normie ℓ_1

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\#\|_1 \leq \frac{2(1+\rho)}{1-\rho} \cdot \sigma_s(\mathbf{x})_1 + \frac{4\tau}{1-\rho} \cdot \eta. \quad (2.7)$$

Warto zastanowić się nad interpretacją powyższego wyniku. Oszacowanie błędu rekonstrukcji sygnału \mathbf{x} ma dwa składniki, jeden wynikający z błędu pomiarowego oraz drugi wynikający z faktu, że \mathbf{x} nie musi być s -rzadki. Jednak w przypadku pomiarów dokładnych (tzn. gdy $\eta = 0$) i s -rzadkiego wektora \mathbf{x} otrzymujemy dokładną rekonstrukcję sygnału.

2.3. Równoważność minimalizacji w normie ℓ_0 i ℓ_1

Rozdział ten podsumujemy wnioskiem z Twierdzenia 2.2 wykazującym równoważność rozwiązania problemu minimalizacji ℓ_0 i ℓ_1 .

Wniosek 2.1. *Niech $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dla każdego s -rzadkiego wektora \mathbf{x} , jeśli Φ spełnia NSP rzędu s , to rozwiązanie problemu minimalizacji ℓ_1 (P_1), gdzie $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$, jest jednocześnie rozwiązaniem problemu minimalizacji ℓ_0 (P_0).*

Dowód. Załóżmy, że każdy s -rzadki wektor \mathbf{x} może być zrekonstruowany z pomiarów $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ przy pomocy minimalizacji ℓ_1 . Niech \mathbf{z} będzie rozwiązaniem problemu minimalizacji normy ℓ_0 dla $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$. Wówczas $\|\mathbf{z}\|_0 \leq \|\mathbf{x}\|_0$, a więc \mathbf{z} jest również s -rzadki. Z jednoznaczności rozwiązania problemu minimalizacji normy ℓ_1 dla dowolnego s -rzadkiego wektora wynika jednak, że $\mathbf{x} = \mathbf{z}$, co kończy dowód wniosku. \square

Rozdział 3

Własność ograniczonej izometrii

(ang. *restricted isometry property* -
RIP)

Jak pokazaliśmy w poprzednim rozdziale, spełnienie własności jądra (NSP) przez macierz pomiarową Φ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym rekonstrukcji rzadkich sygnałów (odpowiedniego rzędu) poprzez minimalizację normy ℓ_1 . Jednak charakter warunku NSP sprawia, że konstrukcja macierzy, które go spełniają jest wysoce nietrywialna. Wynika to z konieczności sprawdzenia wszystkich wektorów należących do $\ker \Phi$, co jest numerycznie złożone. W pierwszych pracach poświęconych oszczędnemu próbkowaniu [8] Candès i Tao wprowadzili mocniejszy warunek, który pozwoli na stabilną rekonstrukcję sygnałów rzadkich (bądź kompresowalnych). Nosi on nazwę *własności ograniczonej izometrii* (ang. *restricted isometry property*). Od tamtej pory był on wielokrotnie analizowany, co prowadziło do uzyskania coraz lepszych oszacowań na stałe pojawiające się w głównym twierdzeniu, jakie zostanie przytoczone.

3.1. Definicja, podstawowe własności

Definicja 3.1. Niech $s \geq 1$ będzie dowolną liczbą naturalną i $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Stałą s -ograniczonej izometrii (ang. *s-restricted isometry constant*) macierzy Φ nazywamy najmniejszą liczbę $\delta_s \geq 0$ taką, że

$$(1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (3.1)$$

dla dowolnego $\mathbf{x} \in \Sigma_s$.

Przyjęło się mówić, że macierz $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ spełnia *własność ograniczonej izometrii* (ang. *restricted isometry property* - RIP), jeśli δ_s jest małe dla odpowiednio dużych s .

Okazuje się, i zostanie to sformułowane w dalszej części rozdziału, że spełnienie własności ograniczonej izometrii z odpowiednią stałą pozwoli na dokładną rekonstrukcję sygnałów rzadkich z dokładnych pomiarów poprzez minimalizację ℓ_1 oraz przybliżoną z pomiarów zaszumionych. Rozważając RIP, należy zastanowić się nad dwoma zagadnieniami:

- (a) jakie oszacowania muszą spełniać stałe ograniczonej izometrii, by możliwa była dokładna rekonstrukcja,
- (b) dokładnością przybliżonej rekonstrukcji w przypadku pomiarów zaszumionych bądź rekonstrukcji sygnałów, które nie są rzadkie.

Głównym elementem teoretycznej części tej pracy będzie twierdzenie, które powiąże ze sobą dwa powyższe punkty, wraz z dowodem, sformułowane i udowodnione przez Candès'a w [6].

W pierwszej kolejności należy jednak przytoczyć dwa użyteczne fakty, które pokażą podstawowe własności stałych ograniczonej izometrii. Zauważmy, że zachodzi $\Sigma_s \subseteq \Sigma_{s+1}$, co w połączeniu z faktem, że stała s -ograniczonej izometrii jest najmniejszą stałą, która spełnia nierówności (3.1) daje natychmiast własność sformułowaną w poniższym lemacie.

Lemat 3.1. *Ciąg stałych ograniczonej izometrii jest niemalejący, tzn.*

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_s \leq \delta_{s+1} \leq \dots$$

Lemat 3.2. *Niech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{C}^n$ będą wektorami takimi, że $\|\mathbf{x}_1\|_0 \leq s_1$ i $\|\mathbf{x}_2\|_0 \leq s_2$ i ponadto $\text{supp } \mathbf{x}_1 \cap \text{supp } \mathbf{x}_2 = \emptyset$. Wówczas*

$$|\langle \Phi \mathbf{x}_1, \Phi \mathbf{x}_2 \rangle| \leq \delta_{s_1+s_2} \|\mathbf{x}_1\|_2 \cdot \|\mathbf{x}_2\|_2. \quad (3.2)$$

Dowód. Niech \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 będą wektorami unormowanymi takimi, że $\|\mathbf{x}_1\|_0 \leq s_1$, $\|\mathbf{x}_2\|_0 \leq s_2$ i $\text{supp } \mathbf{x}_1 \cap \text{supp } \mathbf{x}_2 = \emptyset$. Wówczas, ponieważ zachodzi $\|\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2\|_2^2 = \|\mathbf{x}_1\|_2^2 + \|\mathbf{x}_2\|_2^2 = 2$ i $(\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2) \in \Sigma_{s_1+s_2}$, otrzymujemy z definicji RIP

$$(1 - \delta_{s_1+s_2}) \cdot 2 \leq \|\Phi(\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2)\|_2^2 \leq (1 + \delta_{s_1+s_2}) \cdot 2.$$

Korzystając z reguły równoległoboku otrzymujemy

$$|\langle \Phi \mathbf{x}_1, \Phi \mathbf{x}_2 \rangle| = \frac{1}{4} \left(\|\Phi \mathbf{x}_1 + \Phi \mathbf{x}_2\|_2^2 - \|\Phi \mathbf{x}_1 - \Phi \mathbf{x}_2\|_2^2 \right) \leq \delta_{s_1+s_2}.$$

Niech teraz \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 będą dowolnymi wektorami spełniającymi założenia lematu. Wówczas

$$\delta_{s_1+s_2} \geq \left| \left\langle \Phi \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|_2}, \Phi \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|_2} \right\rangle \right| = \frac{|\langle \Phi \mathbf{x}_1, \Phi \mathbf{x}_2 \rangle|}{\|\mathbf{x}_1\|_2 \cdot \|\mathbf{x}_2\|_2},$$

co kończy dowód. \square

Można już teraz przejść do głównej części rozdziału, czyli dowodu warunku dostatecznego jednoznaczności rozwiązania problemu minimalizacji ℓ_1 . Dowód zostanie przedstawiony w pełnej ogólności, dla dowolnych sygnałów $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ i pomiarów obarczonych błędem.

3.2. Stabilna rekonstrukcja z zaszumionych danych

Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ będzie sygnałem, który chcemy zrekonstruować z pomiarów $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e}$, gdzie $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ jest macierzą pomiarową, a \mathbf{e} jest błędem pomiarowym. Zakładamy, że potrafimy oszacować wielkość tego błędu, tzn. istnieje $\eta > 0$ takie, że $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta$, a także znamy wartość stałej $2s$ -ograniczonej izometrii δ_{2s} macierzy Φ . Wówczas zachodzi poniższe twierdzenie, sformułowane i udowodnione przez Candès'a w [6].

Twierdzenie 3.1. *Niech $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ i $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta$. Wówczas rozwiązanie $\mathbf{x}^\#$ problemu*

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|\Phi \mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta \quad (P_{1,\eta})$$

spełnia nierówność

$$\|\mathbf{x}^\# - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}|_s\|_1 + C_1 \eta \quad (3.3)$$

ze stałymi

$$C_0 = 2 \cdot \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)\delta_{2s}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_{2s}}, \quad C_1 = \frac{4\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - (1 + \sqrt{2})\delta_{2s}},$$

gdzie $\mathbf{x}|_s$ oznacza najlepsze s -rzadkie przybliżenie wektora \mathbf{x} .

Dowód. Zauważmy na początek, że

$$\|\Phi(\mathbf{x}^\# - \mathbf{x})\|_2 \leq \|\Phi\mathbf{x}^\# - \mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2 \leq 2\eta, \quad (3.4)$$

co wynika z nierówności trójkąta i faktu, że \mathbf{x} należy do zbioru wektorów dopuszczalnych problemu $(P_{1,\eta})$. Niech $\mathbf{h} := \mathbf{x}^\# - \mathbf{x}$ i rozłóżmy \mathbf{h} na sumę wektorów o rozłącznych nośnikach, tzn. $\mathbf{h}_{T_0}, \mathbf{h}_{T_1}, \mathbf{h}_{T_2}, \dots$, gdzie każdy \mathbf{h}_{T_j} jest co najwyżej s -rzadki, w następujący sposób: niech T_0 będzie zbiorem indeksów s największych co do modułu współrzędnych \mathbf{x} , T_1 będzie zbiorem indeksów s największych współrzędnych $h_{T_0^c}$, T_2 będzie zbiorem indeksów s największych współrzędnych $h_{(T_0 \cup T_1)^c}$, itd.

Zwróćmy uwagę na fakt, że dla $j \geq 2$ zachodzi

$$\|\mathbf{h}_{T_j}\|_2^2 = \sum_{i \in T_j} |h_i|^2 \leq \sum_{i \in T_j} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty^2 = s \|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty^2,$$

gdzie $\|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty = \max_{i \in T_j} |h_i|$. Ponadto, ponieważ wszystkie niezerowe współrzędne $\mathbf{h}_{T_{j-1}}$ są nie mniejsze co do modułu niż wszystkie niezerowe współrzędne \mathbf{h}_{T_j} , otrzymujemy

$$\|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty \leq \frac{1}{s} \sum_{i \in T_{j-1}} |h_i| = \frac{1}{s} \|\mathbf{h}_{T_{j-1}}\|_1,$$

czyli, podsumowując powyższe rozważania, dla $j \geq 2$ mamy

$$\|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \leq \sqrt{s} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_{j-1}}\|_1. \quad (3.5)$$

Stąd

$$\sum_{j \geq 2} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} (\|\mathbf{h}_{T_1}\|_1 + \|\mathbf{h}_{T_2}\|_1 + \dots) \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \quad (3.6)$$

i ostatecznie

$$\|\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 = \left\| \sum_{j \geq 2} \mathbf{h}_{T_j} \right\|_2 \leq \sum_{j \geq 2} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1. \quad (3.7)$$

Należy zauważyć, że $\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1$ nie może być duża, ponieważ $\|\mathbf{x} + \mathbf{h}\|_1 = \|\mathbf{x}^\#\|_1$ jest minimalna.

Rzeczywiście, zachodzi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &\geq \|\mathbf{x} + \mathbf{h}\|_1 = \sum_{i \in T_0} |x_i + h_i| + \sum_{i \in T_0^c} |x_i + h_i| \geq \sum_{i \in T_0} |x_i| - \sum_{i \in T_0} |h_i| - \sum_{i \in T_0^c} |x_i| + \sum_{i \in T_0^c} |h_i| \\ &= \|\mathbf{x}_{T_0}\|_1 - \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 - \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1 + \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1, \end{aligned}$$

co prowadzi do $\|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1 = \|\mathbf{x}\|_1 - \|\mathbf{x}_{T_0}\|_1 \geq -\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 - \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1 + \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1$, a stąd

$$\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1. \quad (3.8)$$

Z (3.7) i (3.8) dostajemy

$$\|\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 + \frac{2}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1.$$

Zauważmy, że $\|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}|_s\|_1$, a z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 = \sum_{i \in T_0} |h_i| \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{i \in T_0} |h_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i \in T_0} 1^2} = \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 \cdot \sqrt{s}$$

i oznaczając $e = \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}|_s\|_1 = \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1$, dostajemy

$$\|\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 \leq \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 + 2e, \quad (3.9)$$

co daje pierwsze z poszukiwanych ograniczeń.

W kolejnym etapie należy ograniczyć $\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2$. Zauważmy, że

$$\Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1} = \Phi \left(\mathbf{h} - \sum_{j \geq 2} \mathbf{h}_{T_j} \right) = \Phi \mathbf{h} - \sum_{j \geq 2} \Phi \mathbf{h}_{T_j}$$

i stąd

$$\begin{aligned} \|\Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 &= \langle \Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1} \rangle = \langle \Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \Phi \mathbf{h} \rangle - \sum_{j \geq 2} \langle \Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \Phi \mathbf{h}_{T_j} \rangle \\ &= \langle \Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \Phi \mathbf{h} \rangle - \sum_{j \geq 2} \langle \Phi \mathbf{h}_{T_0}, \Phi \mathbf{h}_{T_j} \rangle - \sum_{j \geq 2} \langle \Phi \mathbf{h}_{T_1}, \Phi \mathbf{h}_{T_j} \rangle. \end{aligned}$$

Z (3.4) oraz z RIP wynika, że

$$|\langle \Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}, \Phi \mathbf{h} \rangle| \leq \|\Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \cdot \|\Phi \mathbf{h}\|_2 \leq \sqrt{1 + \delta_{2s}} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \cdot 2\eta, \quad (3.10)$$

a z Lematu 3.2 dostajemy, że

$$\begin{aligned} \left| \langle \Phi \mathbf{h}_{T_0}, \Phi \mathbf{h}_{T_j} \rangle \right| &\leq \delta_{2s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 \cdot \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2, \quad j \geq 2, \\ \left| \langle \Phi \mathbf{h}_{T_1}, \Phi \mathbf{h}_{T_j} \rangle \right| &\leq \delta_{2s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_1}\|_2 \cdot \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2, \quad j \geq 2. \end{aligned}$$

Ponieważ T_0 i T_1 są zbiorami rozłącznymi, mamy $\|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 + \|\mathbf{h}_{T_1}\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2$, co wynika z faktu, że $\|\mathbf{h}_{T_0}\|_2^2 + \|\mathbf{h}_{T_1}\|_2^2 = \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2^2$ oraz $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

Stąd, z RIP, (3.10) i (3.6)

$$\begin{aligned} (1 - \delta_{2s}) \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 &\leq \|\Phi \mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 \leq \left(2\sqrt{1 + \delta_{2s}} \cdot \eta + \sqrt{2} \delta_{2s} \cdot \sum_{j \geq 2} \|\mathbf{h}_{T_j}\|_2 \right) \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \\ &\leq \left(2\sqrt{1 + \delta_{2s}} \cdot \eta + \frac{\sqrt{2} \delta_{2s}}{\sqrt{s}} \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \right) \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \end{aligned}$$

i po obustronnym podzieleniu przez $\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \cdot (1 - \delta_{2s})$ mamy

$$\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq \frac{2\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - \delta_{2s}} \cdot \eta + \frac{\sqrt{2} \delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} \cdot \frac{\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{s}}. \quad (3.11)$$

Z powyższego, i z nierówności (3.8), otrzymujemy

$$\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq \alpha \cdot \eta + \beta \cdot \frac{\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1}{\sqrt{s}} + 2\beta \cdot \frac{\|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{s}}, \quad \text{gdzie } \alpha = \frac{2\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - \delta_{2s}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2} \delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}}$$

i ponieważ $\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2$, to musi zachodzić

$$\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq \alpha \cdot \eta + \beta \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 + 2\beta \cdot e,$$

gdzie $e = \frac{1}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_2$. Zatem

$$\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq \frac{1}{1 - \beta} (\alpha \cdot \eta + 2\beta \cdot e), \quad (3.12)$$

o ile spełnione będzie założenie $\beta < 1$, tzn.

$$\frac{\sqrt{2} \delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} - 1 = \frac{\delta_{2s}(1 + \sqrt{2}) - 1}{1 - \delta_{2s}} < 0,$$

czyli $\delta_{2s} < \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$. Podsumowując, z (3.9) oraz (3.12)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|_2 &\leq \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 + \|\mathbf{h}_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 \leq \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 + \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 + 2e \\ &\leq 2\|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2 + 2e \leq \frac{2\alpha}{1 - \beta} \cdot \eta + \left(\frac{4\beta}{1 - \beta} + 2 \right) \cdot e = C_1 \eta + C_0 e, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\alpha}{1 - \beta} = 2 \frac{2\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - \delta_{2s}} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2} \delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} \right)^{-1} = \frac{4\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - \delta_{2s}} \cdot \frac{1 - \delta_{2s}}{1 - (1 + \sqrt{2})\delta_{2s}} \\ &= \frac{4\sqrt{1 + \delta_{2s}}}{1 - (1 + \sqrt{2})\delta_{2s}}, \\ C_0 &= \frac{4\beta}{1 - \beta} + 2 = \frac{2\beta + 2}{1 - \beta} = 2 \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{2} \delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{2} \delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} \right)^{-1} \\ &= 2 \cdot \frac{1 - (1 - \sqrt{2})\delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} \cdot \frac{1 - \delta_{2s}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_{2s}} = 2 \cdot \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)\delta_{2s}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_{2s}}, \end{aligned}$$

co daje tezę i kończy dowód. \square

Z powyższego twierdzenia można wyciągnąć wniosek dotyczący rekonstrukcji sygnału z dokładnych pomiarów $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$, sformułowany w postaci poniższego twierdzenia [6].

Twierdzenie 3.2. *Niech $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$. Wówczas rozwiązanie $\mathbf{x}^\#$ problemu*

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \Phi \mathbf{z} = \mathbf{y}, \quad (P_1)$$

spełnia nierówności

$$\|\mathbf{x}^\# - \mathbf{x}\|_1 \leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}|_s\|_1, \quad (3.13)$$

$$\|\mathbf{x}^\# - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}|_s\|_1 \quad (3.14)$$

ze stałą C_0 jak w Twierdzeniu 3.1. W szczególności, jeśli \mathbf{x} jest sygnałem s -rzadkim, to rekonstrukcja jest dokładna.

Dowód. Teza dla sygnałów s -rzadkich jest oczywista i wynika z faktu, że wówczas $\mathbf{x} = \mathbf{x}|_s$. Nierówność (3.14) jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 3.1 dla $\eta = 0$.

Należy zająć się jedynie nierównością (3.13). Jak pokazaliśmy w dowodzie poprzedniego twierdzenia, dla \mathbf{h} i zbiorów T_j zdefiniowanych jak w dowodzie Twierdzenia 3.1, prawdziwe są nierówności

$$\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0}\|_2 \leq \sqrt{s} \cdot \|\mathbf{h}_{T_0 \cup T_1}\|_2$$

i łącząc ten wynik z nierównością (3.11) dla $\eta = 0$ otrzymujemy

$$\|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 \leq \rho \cdot \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1, \quad \rho = \frac{\sqrt{2} \delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}}. \quad (3.15)$$

Korzystając z powyższej nierówności oraz z (3.8) otrzymujemy

$$\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \rho \cdot \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1$$

i stąd $\|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq \frac{2}{1-\rho} \cdot \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1$. Zatem, w przypadku dokładnych pomiarów, tj. gdy $\eta = 0$, wektor $\mathbf{h} = \mathbf{x}^\# - \mathbf{x}$ spełnia

$$\|\mathbf{h}\|_1 = \|\mathbf{h}_{T_0}\|_1 + \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \stackrel{(3.15)}{\leq} (1 + \rho) \cdot \|\mathbf{h}_{T_0^c}\|_1 \leq 2 \cdot \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \cdot \|\mathbf{x}_{T_0^c}\|_1,$$

co dowodzi tezy. \square

3.3. Uwagi

Warto na koniec tego rozdziału dodać kilka komentarzy na temat otrzymanych wyników. Twierdzenie 3.2 dowodzi dodatkowo, że dla $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ rozwiązanie problemu minimalizacji normy ℓ_1 jest jednocześnie rozwiązaniem problemu minimalizacji ℓ_0 , a ponadto jest to rozwiązanie jednoznaczne.

Przytoczony wynik nie jest jednak optymalny. Cai, Wang i Xu w [4] wykazali, że wystarczy, by $\delta_{2s} < \frac{1}{1+\sqrt{1,25}} \approx 0,472$, natomiast autorzy [5] zblizali się systematycznie z ograniczeniem δ_{2s} do wartości $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Okazuje się jednak, że jest to granica, której nie da się przekroczyć i zostały skonstruowane przykłady, które nie pozwalają na dokładną rekonstrukcję w procesie minimalizacji ℓ_1 , gdy $\delta_{2s} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Niektórzy autorzy wykazują również, że analogiczne twierdzenia zachodzą przy założeniu, że ograniczone są inne stałe ograniczonej izometrii, na przykład δ_s . Powstało wiele prac, które pokazują jak bardzo możemy zwiększyć te ograniczenia, aby wciąż możliwa była dokładna rekonstrukcja. Jako przykład można podać tutaj ograniczenie na stałą δ_s . Pokazano, że jeśli $\delta_s > \frac{1}{3}$, to istnieją przykłady wektorów s -rzadkich, których nie da się jednoznacznie zrekonstruować w wyniku minimalizacji ℓ_1 [5].

Rozdział 4

Przykład macierzy pomiarowej

Opisane wcześniej wyniki pokazują, że jeśli schemat pomiarowy $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ma własność ograniczonej izometrii z odpowiednio niewielkimi stałymi, to dowolny wektor s -rzadki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ można zrekonstruować za pomocą minimalizacji ℓ_1 z pomiarów $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$. Powstaje pytanie jak skonstruować macierze, które będą tę własność spełniać. Większość przykładów opisywanych w literaturze opartych jest na teorii macierzy losowych i spełnia założenia przytoczonych w poprzednim rozdziale twierdzeń, gdy s jest co najwyżej proporcjonalne do m oraz pewnego czynnika logarytmicznego. Można wśród nich wymienić m.in.

- (a) macierze losowe, których elementy są i.i.d., na przykład z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, \frac{1}{\sqrt{n}})$;
- (b) Fourierowski schemat pomiarowy, który powstaje przez wybranie m wierszy z macierzy dyskretnej transformaty Fouriera wymiaru $n \times n$ i unormowanie kolumn;
- (c) ogólny ortogonalny schemat pomiarowy, tzn. powstały przez wybranie m wierszy macierzy ortogonalnej $n \times n$ i unormowanie kolumn.

Ze względu na zastosowanie w tomografii rezonansu magnetycznego, szczególna uwaga zostanie poświęcona schematowi pomiarowemu opartemu na dyskretnej transformacie Fouriera.

4.1. Dyskretna transformata Fouriera

Ze względu na analogię między dyskretną a klasyczną transformatą Fouriera, w dalszej części tego rozdziału przez $\mathbf{x}(t)$ będziemy oznaczać t -tą współrzędną wektora \mathbf{x} i indeksować wektory z \mathbb{C}^n liczbami ze zbioru $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$.

Definicja 4.1. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Definiujemy *dyskretną transformatę Fouriera* (ang. *discrete time Fourier transform* - DTFT) sygnału \mathbf{x} jako $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$; $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$, daną wzorem

$$\hat{\mathbf{x}}(\omega) := \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{x}(t) e^{-2\pi i \frac{\omega t}{n}}, \quad \omega = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.1)$$

Wówczas *odwrotna dyskretna transformata Fouriera* opisana jest wzorem

$$\mathbf{x}(t) := \frac{1}{n} \sum_{\omega=0}^{n-1} \hat{\mathbf{x}}(\omega) e^{2\pi i \frac{\omega t}{n}}, \quad t = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

W literaturze spotyka się definicje dyskretnej transformaty Fouriera różniące się między sobą czynnikami skalującymi (w powyższej definicji przyjęto 1 oraz $\frac{1}{n}$, ale bardzo często wprowadza się $\frac{1}{\sqrt{n}}$ i $\frac{1}{\sqrt{n}}$). Nie ma to jednak znaczenia dla dalszych rozważań.

Okazuje się, że gdy mamy do czynienia z sygnałami s -rzadkimi, to znany jest ścisły warunek, jaki musi spełniać schemat pomiarowy, aby możliwa była dokładna rekonstrukcja sygnału z próbek [7].

Twierdzenie 4.1. Niech n będzie liczbą pierwszą oraz $\Omega \subset \{0, \dots, n-1\}$, $\#\Omega = m$. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ będzie sygnałem s -rzadkim o nośniku $T = \text{supp } \mathbf{x}$ takim, że

$$2s \leq m. \quad (4.3)$$

Wówczas \mathbf{x} może być dokładnie zrekonstruowany z pomiarów $\hat{\mathbf{x}}|_{\Omega}$.

Ponadto, jeśli $m < n$ (tzn. Ω nie jest zbiorem wszystkich n częstotliwości), to istnieją różne wektory \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 takie, że $\#(\text{supp } \mathbf{x}_1), \#(\text{supp } \mathbf{x}_2) \leq \frac{m}{2} + 1$ i $\hat{\mathbf{x}}_1|_{\Omega} = \hat{\mathbf{x}}_2|_{\Omega}$.

Zanim jednak przejdziemy do właściwego dowodu powyższego twierdzenia, należy przytoczyć twierdzenie sformułowane i udowodnione przez T. Tao w [18]. Za autorem, będziemy stosować symbol $\ell^2(\Omega)$ na oznaczenie wektorów z \mathbb{C}^n , które są równe 0 poza Ω .

Lemat 4.1. Niech n będzie liczbą pierwszą, a T i Ω będą podzbiorami $\{0, \dots, n-1\}$. Definiujemy *obcięłą transformatę Fouriera* $\mathcal{F}_{T \rightarrow \Omega} : \ell^2(T) \rightarrow \ell^2(\Omega)$ jako

$$\forall_{\mathbf{x} \in \ell^2(T)} \mathcal{F}_{T \rightarrow \Omega} \mathbf{x} := \hat{\mathbf{x}}|_{\Omega}. \quad (4.4)$$

Wówczas

(a) jeśli $\#T = \#\Omega$, to $\mathcal{F}_{T \rightarrow \Omega}$ jest bijekcją,

(b) jeśli $\#T \leq \#\Omega$, to $\mathcal{F}_{T \rightarrow \Omega}$ jest iniekcją,

(c) jeśli $\#T \geq \#\Omega$, to $\mathcal{F}_{T \rightarrow \Omega}$ jest surjekcją.

Te same własności zachodzą również dla transformaty odwrotnej.

Dowód Twierdzenia 4.1. Niech $\#T \leq \frac{1}{2}\#\Omega$. Weźmy wektory \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 takie, że $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_2$ i $\#\text{supp } \mathbf{x}_1 = \#\text{supp } \mathbf{x}_2 \leq \frac{1}{2}\#\Omega$. Wówczas transformata Fouriera wektora $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ znika na zbiorze Ω i $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_0 \leq \#\Omega$. Z Lematu 4.1 mamy, że $\mathcal{F}_{\text{supp}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \rightarrow \Omega}$ jest iniekcją, a stąd $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = 0$ i otrzymujemy tezę o jednoznaczności.

Zajmijmy się teraz drugą częścią twierdzenia. Ponieważ $\#\Omega < n$, możemy znaleźć rozłączne podzbiory T i S zbioru \mathbb{Z}_n takie, że $\#T, \#S \leq \frac{1}{2}\#\Omega + 1$ oraz $\#T + \#S = \#\Omega + 1$. Niech $\omega_0 \notin \Omega$. Stosując Lemat 4.1 otrzymujemy, że $\mathcal{F}_{T \cup S \rightarrow \Omega \cup \{\omega_0\}}$ jest bijekcją i możemy znaleźć wektor \mathbf{h} o nośniku $T \cup S$, którego transformata Fouriera znika na Ω , ale jest niezerowa w ω_0 . W szczególności $\mathbf{h} \neq 0$. Tezę otrzymamy po wzięciu $\mathbf{x}_1 := \mathbf{h}|_T$ i $\mathbf{x}_2 := -\mathbf{h}|_S$, bo wówczas

$$\hat{\mathbf{x}}_1|_{\Omega} = \widehat{\mathbf{h}|_T}|_{\Omega} = -\widehat{\mathbf{h}|_S}|_{\Omega} = \hat{\mathbf{x}}_2|_{\Omega},$$

i środkowa równość wynika z faktu, że $0 = \hat{\mathbf{h}}|_{\Omega} = \widehat{\mathbf{h}_T + \mathbf{h}_S}|_{\Omega} = \widehat{\mathbf{h}|_T}|_{\Omega} + \widehat{\mathbf{h}|_S}|_{\Omega}$. \square

Powyższe twierdzenie mówi, że można zrekonstruować dowolny s -rzadki sygnał \mathbf{x} z $2s$ pomiarów częstotliwościowych (tzn. próbek dyskretnej transformaty Fouriera) i nie da się tego zrobić, jeśli pomiarów jest mniej. Rekonstrukcja ta może być przeprowadzona poprzez rozwiązanie problemu minimalizacji ℓ_0 . Pozostaje pytanie o warunki, jakie muszą być spełnione by można było przeprowadzić dokładną rekonstrukcję za pomocą minimalizacji ℓ_1 . Warto zwrócić uwagę na jedno z założeń Twierdzenia 4.1 (wynikające z założenia Lematu 4.1), tzn. na warunek, że n musi być liczbą pierwszą. Istnieją kontrprzykłady (opisane w [7]) pokazujące, że Lemat 4.1 (a w konsekwencji Twierdzenie 4.1) nie zachodzi, gdy n nie jest liczbą pierwszą i wynika to z istnienia nietrywialnych podgrup grupy \mathbb{Z}_n z dodawaniem modulo n .

4.2. Spełnienie założeń stabilnej rekonstrukcji

W jednej z pierwszych prac poświęconych oszczędnemu próbkowaniu, Candès i Tao [9] wskazywali, przyjmując inną definicję własności ograniczonej izometrii (nazywanej tam jednostajną zasadą nieoznaczoności), odpowiednie warunki, dla których zachodzi teza Twierdzenia 3.1.

Definicja 4.2. Niech $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Mówimy, że Φ spełnia *jednostajną zasadę nieoznaczoności* (ang. *uniform uncertainty principle* - UUP) ze stałą λ , jeśli dla każdej dostatecznie małej $\alpha > 0$ i dla pewnej ustalonej stałej $\rho > 0$ poniższy warunek zachodzi z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - O(n^{-\rho/\alpha})$:

$$\forall_{\|\mathbf{x}\|_0 \leq \alpha m / \lambda} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2^2 \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{n} \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad (4.5)$$

Twierdzenie 4.2. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ będzie sygnałem s -rzadkim, a $\mathcal{F}_\Omega \in \mathbb{C}^{m \times n}$ będzie Fourierskim schematem pomiarowym. Wówczas, jeśli spełniony jest warunek

$$s \leq C \cdot \frac{m}{(\log n)^6}, \quad (4.6)$$

to z bardzo dużym prawdopodobieństwem (rzędu $1 - O(n^{-\rho/\alpha})$) zachodzą założenia Twierdzenia 3.1. Stała C jest zależna od α , a stałe ρ i α są stałymi z definicji UUP.

Powyższe twierdzenie pozostawiamy bez dowodu. Warto jednak skomentować, że jego teza mówi o tym, że Fourierski schemat pomiarowy spełnia UUP (a więc w konsekwencji również RIP) ze stałą $\lambda = (\log n)^6$ z pewnym wysokim prawdopodobieństwem zależnym od rzadkości sygnału. Wynik ten jest bardzo istotny z praktycznego punktu widzenia. W wielu zastosowaniach (np. w rekonstrukcji obrazu w tomografii komputerowej czy też w obrazowaniu interferometrycznym w astrofizyce) dane pomiarowe są próbkami transformaty Fouriera sygnału. W następnym rozdziale zostanie pokazany przykład zastosowania rekonstrukcji sygnału na podstawie jego próbek częstotliwościowych.

Rozdział 5

Zastosowania oszczędnego próbkowania

5.1. Prosty eksperyment numeryczny

W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy schemat pomiarowy, który pozwoli na dokładne zrekonstruowanie rzadkiego sygnału z danych pomiarowych. Przytoczyliśmy również argumenty, które uzasadniały wybór tej metody. W tym rozdziale podsumujemy dotychczasowe teoretyczne rozważania i zaprezentujemy proste przykłady, które pokażą, że teoria zgadza się z praktyką. Symulacje zostały wykonane w środowisku `Matlab` i były inspirowane pracami Michaela Lustiga [15].

Przypomnijmy, że chcemy zrekonstruować wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ z pomiarów $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$. Mamy do rozwiązania następujący problem minimalizacji normy ℓ_1 :

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|\Phi \mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta, \quad (P_{1,\eta})$$

gdzie Φ jest macierzą pomiarową spełniając warunki opisane w poprzednich rozdziałach, a η jest poziomem szumu. W praktycznych implementacjach stosuje się często zmodyfikowaną wersję tego problemu, taką, która nie zawiera ograniczeń na poszukiwany wektor:

$$\arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \left(\lambda \|\mathbf{z}\|_1 + \frac{1}{2} \|\Phi \mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2 \right), \quad (5.1)$$

gdzie λ jest pewną dodatnią stałą. Obydwa zagadnienia są ze sobą powiązane, o czym mówi poniższe twierdzenie, które przytaczamy bez dowodu za [12].

Twierdzenie 5.1. *Jeśli wektor \mathbf{x} jest rozwiązaniem problemu minimalizacyjnego (5.1) ze stałą $\lambda > 0$, to istnieje $\eta = \eta_{\mathbf{x}} \geq 0$ taka, że \mathbf{x} jest rozwiązaniem problemu $(P_{1,\eta})$.*

Algorytm rozwiązujący ten problem jest iteracyjny i oparty jest na tzw. miękkim progowaniu (ang. *soft thresholding*). Definiujemy funkcję miękkiego progowania $S : \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$:

$$S(z, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |z| \leq \lambda, \\ (|z| - \lambda) \frac{z}{|z|}, & \text{gdy } |z| > \lambda. \end{cases} \quad (5.2)$$

Niech \mathcal{F}_u oznacza Fourierowski schemat pomiarowy, tzn. niech $\mathcal{F}_u \mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}}$ będzie wektorem losowo wybranych współczynników transformaty Fouriera wektora \mathbf{z} . Niech $\hat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{y} = \mathcal{F}_u \mathbf{x}$.

Wówczas i -ta iteracja algorytmu obejmuje poniższe kroki. Załóżmy, że mamy już $\hat{\mathbf{z}}_i$, wtedy

- (a) znajdź i -te przybliżenie sygnału \mathbf{z}_i jako odwrotną transformatę Fouriera: $\mathbf{z}_i = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_i$,
- (b) zastosuj miękkie progowanie do każdej współrzędnej sygnału \mathbf{z}_i , tzn. $\mathbf{z}_i(k) = S(\mathbf{z}_i(k), \lambda)$,
- (c) oblicz transformatę Fouriera $\hat{\mathbf{z}}_i = \mathcal{F} \mathbf{z}_i$,
- (d) wymuś zgodność otrzymanego przybliżenia z danymi pomiarowymi w dziedzinie częstotliwości, tzn.

$$\hat{\mathbf{z}}_{i+1}(k) = \begin{cases} \hat{\mathbf{z}}_i(k), & \text{gdy } \mathbf{y}(k) = 0, \\ \mathbf{y}(k), & \text{w p.p.} \end{cases}$$

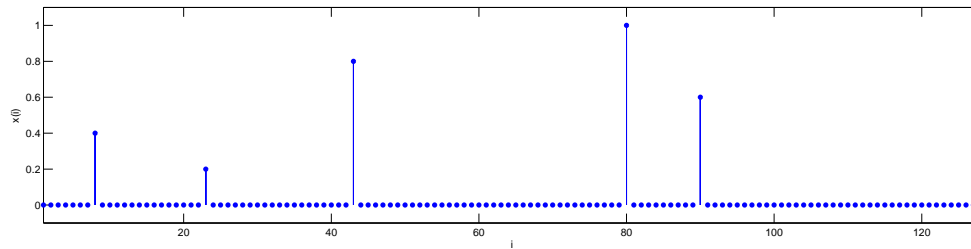
- (e) wróć do punktu (a), o ile $\|\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i\| \geq \varepsilon$ (dla pewnego ustalonego ε).

Pozostaje pytanie o dobór wartości λ . Najczęściej wybór ten jest dokonywany metodą prób i błędów, jednak, jak okaże się później, lepsze wyniki dają mniejsze wartości λ .

Algorytmy bazujące na miękkim progowaniu są podstawą tzw. procesu odsumiania znanego z analizy falkowej. Dowód poprawności algorytmów tego typu oraz informacje na temat jego złożoności można znaleźć w [13].

Powyższy algorytm przetestowaliśmy na 5-rzadkim wektorze $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{128}$ takim, że 5 losowo wybranych współrzędnych jest niezerowych (i równych kolejno $\frac{1}{5}, \dots, \frac{5}{5}$), pokazanym na Rys. 5.1. Pomiary, jakie zostały zasymulowane, to 32 losowo wybrane (z rozkładu jednostajnego) próbki dyskretnej transformaty Fouriera wektora \mathbf{x} (obliczonej za pomocą algorytmu szybkiej transformaty Fouriera (ang. *fast Fourier transform* - FFT), zaimplementowanego w środowisku Matlab). Kod, jaki posłużył do wykonania testów przedstawiono na Listingu 5.1 i 5.2. Na Rys. 5.2 zamieszczone są wyniki działania algorytmu dla różnych wartości parametru λ w postaci wykresów porównujących oryginalny 5-rzadki wektor z jego rekonstrukcją.

Można w powyższego testu wyciągnąć kilka wniosków. Działanie algorytmu jest uzależnione od doboru wartości parametru λ . Im mniejsza wartość λ , tym dokładniejsza rekonstrukcja, co widać na wykresie normy $\|\cdot\|_1$ błędu rekonstrukcji (Rys. 5.2). Dla zastosowanej tutaj wartości $\lambda = 0.01$ rekonstrukcja jest niemal dokładna, tzn. wyraźnie widocznych jest pięć niezerowych współrzędnych zrekonstruowanego wektora, pozostałe wartości są bliskie zeru. Dla zbyt dużej wartości λ (np. $\lambda = 0.2$) odzyskany wektor znacznie różni się od oryginalnego.



Rys. 5.1. Analizowany 5-rzadki wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{128}$.

Listing 5.1: RandomlySampledFFT_1.m

```

1 x = [(1:5)/5, zeros(1,128-5)]; x = x(randperm(128));
2 lambda = [0.01,0.05,0.1,0.2];
3
4 X = 1/sqrt(size(x,2))*fftshift(fft(iffshift(x,2),[],2),2);
5 prm = randperm(128);
6 Y = zeros(1,128); Y(prm(1:32)) = X(prm(1:32));
7
8 for j = 1:4
9     X0 = Y;
10    for i = 1:300
11        x0 = sqrt(size(X0,2))*fftshift(iffshift(X0,2),[],2);
12        xst = SoftThresh(x0,lambda(j));
13        X0 = 1/sqrt(size(xst,2))*fftshift(fft(iffshift(xst,2),[],2),2);
14        X0 = X0.*(Y==0)+Y;
15    end
16 end

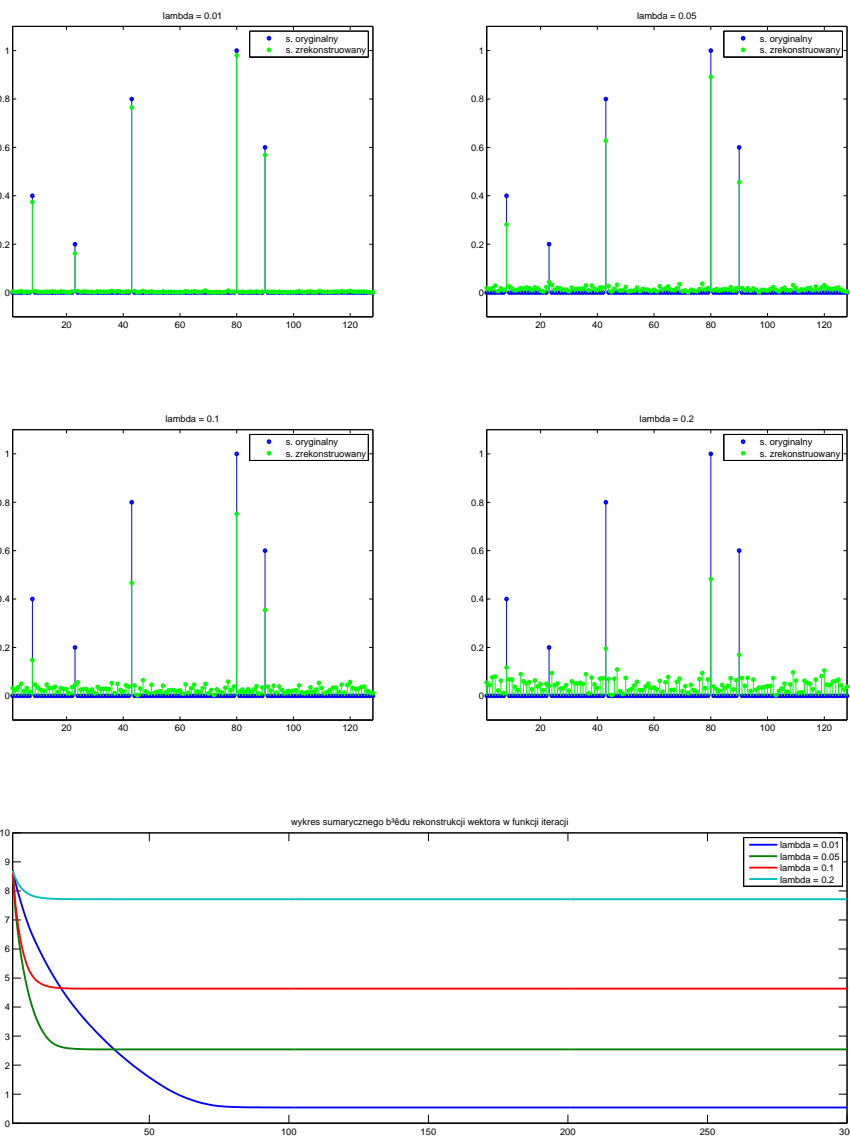
```

Listing 5.2: SoftThresh.m

```

1 function xs = SoftThresh(y,lambda)
2 xs = zeros(size(y));
3 for j=1:size(y,1), for i=1:size(y,2)
4     if abs(y(j,i)) < lambda, xs(j,i) = 0;
5     else, xs(j,i) = (abs(y(j,i))-lambda)*y(j,i)/abs(y(j,i));
6     end
7 end; end

```



Rys. 5.2. Porównanie działania algorytmu minimalizacji w rekonstrukcji wektora rzadkiego z losowych pomiarów częstotliwościowych.

5.2. Tomografia rezonansu magnetycznego

Zajmijmy się teraz przypadkiem danych, które nie pochodzą z symulacji, ale z rzeczywistych badań. Tak jak wspomniano już wcześniej, naturalnym zastosowaniem teorii oszczędnego próbkowania (a w szczególności przykładu macierzy pomiarowej przytoczonego w poprzednim rozdziale) jest tomografia rezonansu magnetycznego. Zanim jednak przejdziemy do numerycznego testu pokazującego, że rekonstrukcja obrazu z losowo wybranych próbek częstotliwościowych jest skuteczna, zacznijmy od kilku informacji na temat akwizycji danych w tomografii rezonansu magnetycznego (ang. *magnetic resonance* - MR).

Dane, jakie zbieramy w tomografii MR to, z matematycznego punktu widzenia, funkcja $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ opisująca własności magnetyczne materii w punktach przestrzeni trójwymiarowej. Szczególnie interesują nas protony, które są scharakteryzowane przez swój moment magnetyczny. Znajdując się w stałym polu magnetycznym B_0 wektory momentów magnetycznych (wytrącone ze stanu równowagi) zaczynają wirować (precesować) z częstotliwością nazywaną *częstotliwością Larmora*

$$\omega = -\gamma B_0, \quad (5.3)$$

gdzie γ jest tzw. współczynnikiem żyromagnetycznym. Jak wiadomo, zmienne pole magnetyczne indukuje zmienne pole elektryczne, zatem w cewkach odbiorczych, które znajdują się wokół tego protonu pojawi się prąd. Jednak ludzkie ciało składa się z wielu protonów, a każdy z nich precesuje z dokładnie tą samą częstotliwością. Aby móc obrazować wiele protonów (tzn. rozróżnić sygnał elektryczny pochodzący od poszczególnych protonów), konieczne jest zróżnicowanie częstotliwości ich precesji. Nakłada się wówczas tzw. *pola gradientowe*

$$\mathbf{G} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (5.4)$$

tzn. pola magnetyczne (zależne od czasu) projektowane tak, by zależały liniowo od pozycji w przestrzeni. Wówczas częstotliwość precesji staje się funkcją położenia w przestrzeni \mathbb{R}^3 :

$$\omega(\mathbf{z}) = -\gamma(B_0 + \langle \mathbf{G}, \mathbf{z} \rangle). \quad (5.5)$$

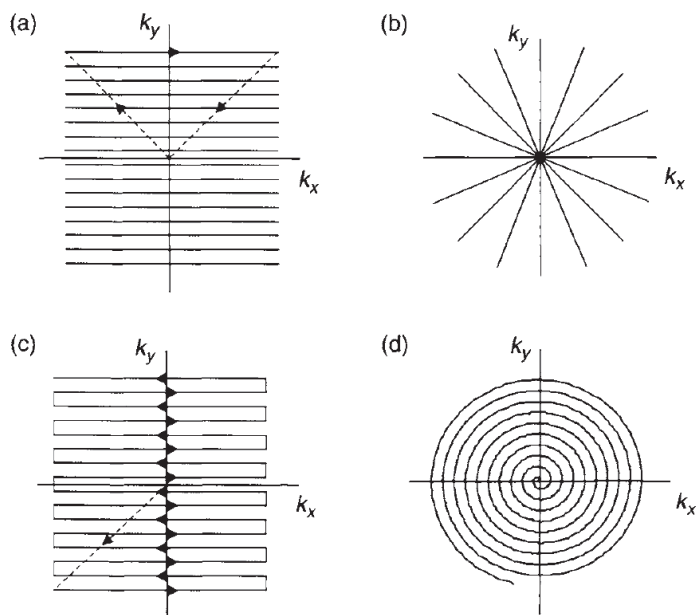
Pola gradientowe definiują tzw. trajektorie pomiaru

$$\mathbf{k}(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t \mathbf{G}(\tau) d\tau, \quad (5.6)$$

a sygnał jaki pojawia się w cewkach odbiorczych jest równy

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |X(\mathbf{z})| e^{-2\pi j(\mathbf{k}(t), \mathbf{z})} d\mathbf{z} = \mathcal{F}(|X|)(\mathbf{k}(t)). \quad (5.7)$$

Jak można zauważyć, jest to transformata Fouriera amplitudy obrazu rezonansu magnetycznego określona w punktach zdefiniowanych przez trajektorie pomiarowe $\mathbf{k}(t)$. W teorii rezonansu magnetycznego transformatę Fouriera jaką się detekuje, nazywa się *przestrzenią k* (ang. *k-space*). W przypadku pomiaru przekroju (tzn. obrazu dwuwymiarowego) będziemy mieć do czynienia z dwuwymiarową transformatą Fouriera. Przykładowe trajektorie wykorzystywane w akwizycji danych dwuwymiarowych widoczne są na Rys. 5.3.



Rys. 5.3. Przykładowe trajektorie próbkowania przestrzeni k [2].

Podsumowując, sygnał mierzony przez system MR jest transformatą Fouriera zależnej od położenia amplitudy magnetyzacji (czyli obrazu), spróbkowaną w czasie badania T na krzywej $\{\mathbf{k}(t) : t \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^3$. Wykonując kilka pomiarów ze zmienionymi parametrami, można zebrać próbki transformaty Fouriera $|X|$ na kilku krzywych $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_L$ w \mathbb{R}^3 . Wymagany czas pomiaru jest proporcjonalny do liczby L próbek. Chcielibyśmy zminimalizować liczbę L .

Naturalnym (z punktu widzenia cyfryzacji danych) krokiem jest dyskretyzacja reprezentująca każdy element objętości w postaci pojedynczego woksela (lub piksela w przypadku dwuwymiarowym), i wówczas amplituda magnetyzacji $|X|$ staje się skończenie-wymiarowym

wektorem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ indeksowanym przez zbiór $Q = [N_1] \times [N_2] \times [N_3]$ (zapis $[N_i]$ oznacza zbiór $\{1, \dots, N_i\}$) i $n = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$. Dyskretyzując krzywe $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_L$, mierzone dane stają się próbkami trójwymiarowej dyskretnej transformaty Fouriera wektora \mathbf{x} , tzn.

$$\forall_{\mathbf{k}=(k_1, k_2, k_3) \in Q} \quad \mathcal{F}(\mathbf{x})(\mathbf{k}) = \sum_{\ell \in Q} \mathbf{x}(\ell) \exp \left\{ -2\pi i \left(\frac{k_1 \ell_1}{N_1} + \frac{k_2 \ell_2}{N_2} + \frac{k_3 \ell_3}{N_3} \right) \right\}. \quad (5.8)$$

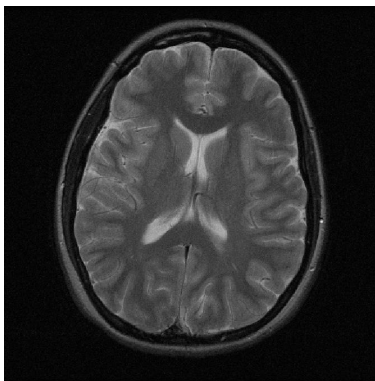
Niech $\Omega \subset Q$ taki, że $\#\Omega = m$, będzie podzbiorem zdyskretyzowanych próbek częstotliwościowych Q , który jest pokryty trajektoriami $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_L$. Wówczas mierzony wektor danych \mathbf{y} odpowiada

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_\Omega \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_\Omega \mathbf{x}, \quad (5.9)$$

gdzie \mathbf{R}_Ω jest liniowym operatorem, który zeruje współrzędne wektora \mathbf{x} o indeksach w zbiorze $Q \setminus \Omega$. Macierz pomiarowa $\mathcal{F}_\Omega \in \mathbb{C}^{m \times n}$ jest Fourierowskim schematem pomiarowym opisywanym w poprzednim rozdziale.

5.3. Eksperyment na danych pomiarowych

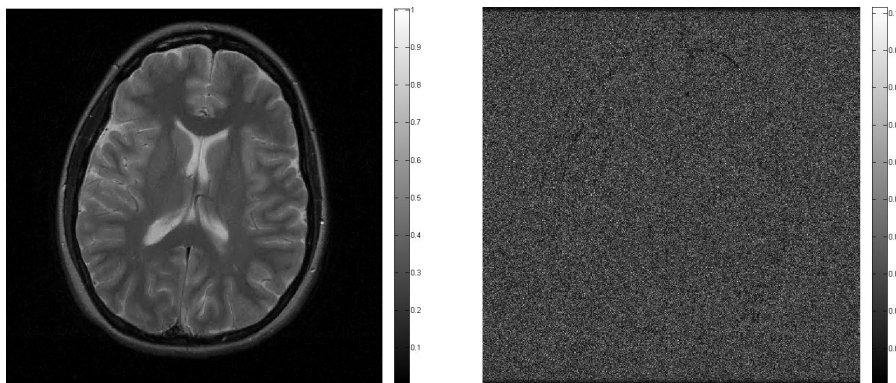
Podobnie jak w poprzednim eksperymencie, zastosujemy algorytm bazujący na miękkim progowaniu, ale tym razem do danych rzeczywistych, pochodzących z tomografii rezonansu magnetycznego. Należy tutaj zauważyć dwa fakty.



Rys. 5.4. Przykładowy obraz z tomografii MR [15].

Po pierwsze, obraz rezonansu magnetycznego (jak na Rys. 5.4) nie jest rzadki w oryginalnej bazie. Istnieją pewne wyjątki, takie jak obrazy z angiografii MR, które są rzadkie w oryginalnej bazie, jednak w ogólności nie mamy tej własności. Okazuje się jednak, że

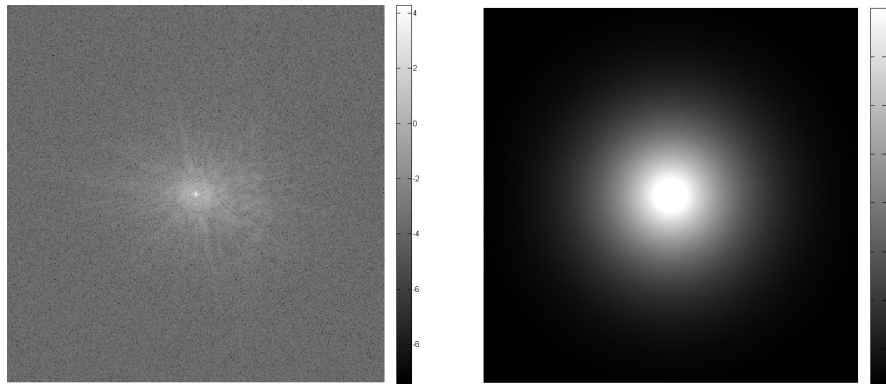
wcześniejsze rozważania teoretyczne można dość łatwo sprowadzić do sytuacji, w której rozważany sygnał jest rzadki, ale w pewnej reprezentacji (tzw. wektor współczynników w pewnej bazie jest rzadki). W przypadku danych z tomografii MR, taką reprezentacją są współczynniki transformaty falkowej (ang. *wavelet transform*). Można zauważyć, że stosując do obrazu transformatę falkową (falki Daubechies, [14]), pozostawiając zaledwie 10% współczynników o największym module i stosując transformatę odwrotną, obraz który uzyskujemy wizualnie nie różni się od oryginalnego obrazu (Rys. 5.5). Należy mieć na uwadze, że dane w tomografii MR są z natury zaszumione (co wynika z błędów pomiarowych i fizyki badania), więc ta różnica między obrazem zrekonstruowanym a oryginalnym nadal będzie miała charakter szumu.



Rys. 5.5. Odtworzenie obrazu z 10% największych co do modułu współczynników transformaty falkowej (falki Daubechies) wraz z mapą bezwzględnego błędu rekonstrukcji (wartość bezwzględna różnicy dwóch obrazów). Obok obrazów umieszczono skale poziomów szarości.

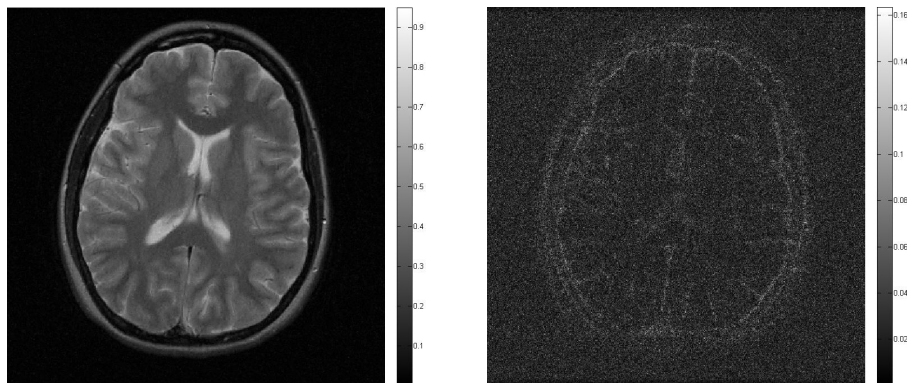
Drugi fakt, o którym warto wspomnieć jest konsekwencją pierwszego. W przypadku danych rzadkich w oryginalnej bazie próbkowanie wektora transformaty Fouriera odbywało się losowo z rozkładem jednostajnym. Gdy dane nie są rzadkie, ale istnieje ich rzadka reprezentacja w pewnej bazie, należy stosować inny schemat próbkowania (funkcję gęstości jaką użyto w omawianej symulacji przedstawiono na Rys. 5.6). Jest to własność, nad którą wciąż prowadzone są liczne badania, m.in. w zespole Andersa Hansena, o czym autor pisze w [1].

Zmodyfikowany algorytm rekonstrukcji obrazu przedstawiono na Listingach 5.3-5.5. Dane (w postaci obrazu, funkcji gęstości oraz pakietu funkcji `Wavelet` realizujących transformatę falkową oraz transformatę Fouriera) pochodzą z [15]. W teście zbadano proces rekonstrukcji



Rys. 5.6. Macierz transformaty Fouriera (logarytmu modułu) obrazu MR oraz mapa funkcji gęstości rozkładu, z jakim wybierano próbki transformaty Fouriera obrazu MR.

obrazu o rozdzielczości 512×512 pikseli z próbek częstotliwościowych stanowiących ok. 33% liczby oryginalnych próbek. Efekt rekonstrukcji, wraz z mapą bezwzględnego błędu między obrazem oryginalnym ze zrekonstruowanym przedstawiono na Rys. 5.7. Uzyskane wyniki pokazują, że różnice między tymi dwoma obrazami nie są zauważalne. Mapa błędów pozwala zauważyć, że błędy pojawiają się na krawędziach widocznych na obrazie, jednak wartości tych błędów są pomijalnie małe. Nie jest to zaskakujący wynik, ponieważ gęściej próbkowane były niskie częstotliwości, a wysokie częstotliwości odpowiadają w obrazie za krawędzie, nastąpiło zatem niewielkie rozmycie krawędzi.



Rys. 5.7. Efekt rekonstrukcji obrazu MR opisanym algorytmem oraz mapa błędów bezwzględnego rekonstrukcji. Obok obrazów umieszczono skale poziomów szarości.

Listing 5.3: RandomlySampledFFT_2.m

```
1 load brain.mat; % im – macierz obrazu MR
2           % mask_vardens – maska próbkowania przestrzeni k
3           % pdf_vardens – gęstość prawdopodobieństwa próbkowania
4 W = Wavelet; % transformata falkowa (falki Daubechies)
5 lambda = 0.025;
6
7 im_W = W*im;
8 Mu = (fft2c(im).*mask_unif)./pdf_unif;
9 imu = ifft2c(Mu);
10
11 DATA = fft2c(im).*mask_vardens;
12 im_cs = ifft2c(DATA./pdf_vardens);
13
14 for i = 1:15
15     im_cs = W'*(SoftThresh2(W*im_cs,lambda));
16     im_cs = ifft2c(fft2c(im_cs).(1-mask_vardens) + DATA);
17 end
```

Listing 5.4: fft2c.m

```
1 function res = fft2c(x)
2 % res = fft2c(x)
3 % orthonormal forward 2D FFT
4 % (c) Michael Lustig 2005
5
6 res = 1/sqrt(length(x(:)))*fftshift(fft2(ifftshift(x)));
```

Listing 5.5: ifft2c.m

```
1 function res = ifft2c(x)
2 % res = ifft2c(x)
3 % orthonormal centered 2D ifft
4 % (c) Michael Lustig 2005
5
6 res = sqrt(length(x(:)))*ifftshift(ifft2(fftshift(x)));
```

5.4. Podstawowe problemy praktyczne

Tak jak już wspomniano, równomierne próbkowanie transformaty Fouriera nie przynosi zadowalających efektów. Pojawia się zatem pytanie, jak dobierać rozkład prawdopodobieństwa, z jakim próbkowanie będzie przeprowadzone.

Inne pytanie, które jest ściśle związane z poprzednim, dotyczy spełniania własności wymienianych w poprzednich rozdziałach, tzn. NSP czy RIP. Okazuje się, że wiele założeń nie jest spełnionych w przykładach spotykanych w praktyce (w szczególności we wszelkich technikach obrazowania medycznego). Jest to jednak oddzielne zagadnienie, które jest rozpatrywane w najnowszych publikacjach i wiąże się z takimi pojęciami jak *asymptotyczna rzadkość*, *asymptotyczna niekoherencja*, czy *wielopoziomowe próbkowanie losowe*, wprowadzonymi w publikacjach Hansena, np. w [1]. Temat ten wykracza jednak poza ramy tej pracy i stanowi pewną inspirację do dalszych prac autora nad tym zagadnieniem.

Rozdział 6

Podsumowanie i wnioski

Przytoczone w niniejszej pracy definicje i twierdzenia stanowią fundament teorii oszczędnego próbkowania. Zajmując się tą tematyką, nie można pominąć tak podstawowych pojęć, jak sygnał rzadki, czy własność ograniczonej izometrii (RIP). Prace, na jakich bazowano, pochodzą sprzed około 10 lat (lata 2004-2006), jednak wciąż są podstawowym źródłem informacji na temat omawianego zagadnienia. Były w pewnym sensie rewolucyjne, bo pokazały, że pomiary nie muszą być konieczne wykonywane zgodnie z klasyczną teorią próbkowania, pochodzącą od Shannona.

Podsumowując ten temat, nie sposób nie zwrócić uwagi na wciąż rosnące zainteresowanie, jakim cieszy się tematyka oszczędnego próbkowania. Jest to teoria rozbudowana zarówno pod względem matematycznym, jak i inżynierskim, a o rosnącym zainteresowaniu świadczy chociażby liczba publikacji (wyszukiwarka bazy ScienceDirect zwraca ok. 1300 publikacji z roku 2013 i już ponad 900 z roku 2014) czy też organizowanie oddzielnych paneli na największych konferencjach naukowych. Pokazuje to szczególną wartość tej teorii, ponieważ stanowi już nie tylko bardzo ciekawy temat teoretyczny, korzystający z rozbudowanych narzędzi matematycznych, ale ma konkretne zastosowania, które mogą poprawić jakość wielu technik inżynierskich.

Świadczą o tym również zrealizowane symulacje, które jasno pokazują, że teoria ma swoje odzwierciedlenie w praktyce. Szczególnie ważny jest przykład pochodzący z tomografii rezonansu magnetycznego. Fizyczne podstawy badania sprawiają, że badania są bardzo czasochłonne, co stanowi problem zarówno dla schorowanych pacjentów jak i techników wyko-

nujących badanie i dbających o wysoką jakość obrazu. Poszukiwane są coraz to nowe techniki redukujące czas badania (np. obrazowanie równoległe), jednak rzeczywiste ograniczenie liczby próbek, jakie należy zmierzyć, by uzyskać obraz dobrej jakości stanowi duże wyzwanie. Wydaje się, że zastosowanie teorii oszczędnego próbkowania stanowi rozwiązanie tego problemu. I choć obecnie rozważania na temat oszczędnego próbkowania są głównie akademickie, to już można spotkać doniesienia producentów sprzętu medycznego, którzy próbują implementować te metody w skanerach rezonansu magnetycznego, czy też tomografii komputerowej [19].

Przedstawione podstawy teoretyczne stanowią bazę do dalszej pracy nad zagadnieniem. Ze względu na naukowe zainteresowania autora, podjęte zostaną próby rozwinięcia i zastosowania opisanych technik w diagnostyce medycznej. Praca zarówno na polu teoretycznym na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych, jak i praktycznym na Wydziale Elektroniki i Technik Informacyjnych niesie nadzieję na skonstruowanie interdyscyplinarnego zespołu, a co za tym ciekawe efekty i wyniki.

Bibliografia

- [1] Adcock B., Hansen A.C., Poon C., Roman B., *Breaking the coherence barrier: A new theory for compressed sensing*. 2014. Available from: arXiv:1302.0561v3 [cs.IT].
- [2] Bernstein M.A., *Handbook of MRI pulse sequences*. Elsevier, 2004.
- [3] Cai T.T., Wang L., Xu G., *New bounds for restricted isometry constants*. IEEE Trans Inform Theory. 2010,56(9), 4388-94.
- [4] Cai T.T., Wang L., Xu G., *Shifting inequality and recovery of sparse signals*. IEEE Trans Signal Processing. 2010,58(3), 1300-8.
- [5] Cai T.T., Zhang A., *Sharp RIP bound for sparse signal and low-rank matrix recovery*. Appl Comput Harmon Anal. 2013,35, 74-93.
- [6] Candès E.J., *The restricted isometry property and its implications for compressed sensing*. C R Acad Sci Paris. 2008,I(346), 589-92.
- [7] Candès E.J., Romberg J., Tao T., *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*. IEEE Trans Inform Theory. 2006,52(2), 489-509.
- [8] Candès E.J., Tao T., *Decoding by linear programming*. IEEE Trans Inform Theory. 2005,51(12), 4203-15.
- [9] Candès E.J., Tao T., *Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?* IEEE Trans Inform Theory. 2006,52(12), 5406-25.

-
- [10] Cohen A., Dahmen W., DeVore R., *Compressed sensing and best k -term approximation*. J Amer Math Soc. 2009,22, 211-31.
- [11] Donoho D.L., Elad M., *Optimally sparse representations in general (non-orthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization*. Proc Nat Acad Sci. 2003,100(5), 2197-202.
- [12] Foucart S., Rauhut H., *A mathematical introduction to compressive sensing*. Benedetto JJ, editor. New York: Birkhäuser, 2013.
- [13] Hale E.T., Yin W., Zhang Y. A fixed-point continuation method for ℓ_1 -regularized minimization with applications to compressed sensing. CAAM Technical Report. Texas, Houston, USA: Rice University, 2007. Report No.: TR07-07.
- [14] Hazewinkel M., *Daubechies wavelets*. In: Encyclopedia of Mathematics. Springer, 2001.
- [15] Lustig M., Medical image reconstruction, assignment 6. Stanford University, 2007.
- [16] Natarajan B.K., *Sparse approximate solutions to linear systems*. SIAM J Comput. 1995,24(2), 227-34.
- [17] Szabatin J., *Przetwarzanie sygnałów*. Warszawa: Politechnika Warszawska, 2003.
- [18] Tao T., *An uncertainty principle for cyclic groups of prime order*. 2004. Available from: arXiv:math/0308286v6 [math.CA].
- [19] Vincenti G., *Preliminary experiences with compressed sensing multi-slice cine acquisitions for the assessment of left ventricular function: CV_sparse WIP*. MAGNETOM Flash. 2014,1, 18-26.

Warszawa, dnia

Oświadczenie

Oświadczam, że pracę dyplomową pod tytułem: "Podstawy teorii oszczędnego próbkowania", której promotorem jest dr Agnieszka Badeńska, wykonałem samodzielnie, co poświadczam własnoręcznym podpisem.

.....