

Całka oznaczona

1. Wyznaczyć dziedzinę i obliczyć pochodną funkcji

$$F(x) = \int_{5x}^{4x^2} \frac{\ln 2t}{(1-t)^2} dt.$$

2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} (e^t - t - 1) dt}{\int_0^{2x} (1 - \cos t) dt}.$$

3. Zbadać monotoniczność i wyznaczyć ekstrema funkcji

$$F(x) = \int_{1+x^2}^{2+x^2} \frac{e^t}{t} dt.$$

4. Obliczyć:

$$\text{a) } \int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cos^2 x dx \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{5x^5 + 4}} \quad \text{c) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^7 x dx}{5 + 3 \cos x}.$$

5. Obliczyć pola powierzchni figur ograniczonych liniami

$$\text{a) } y = 3 - x^2 \text{ i } y = -2x, \quad \text{b) } y = \arctg x \text{ i } y = \frac{\pi}{4}x \text{ (dla } x \geq 0), \quad \text{c) } y = \ln x \text{ i } y = \ln^2 x.$$

6. Obliczyć długości krzywych danych poniższymi funkcjami:

$$\text{a) } y = \frac{2}{3} \sqrt{(2x-3)^3} \quad \text{dla } x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right], \quad \text{b) } y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{dla } x \in [1, 2].$$

7. Obliczyć objętości brył powstałych przez obrót wykresu funkcji $y = f(x)$ wokół osi OX jeśli

$$\text{a) } f(x) = \sin 2x, \quad x \in [0, \pi], \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x}e^{-x/2}, \quad x \in [0, 1].$$

8. Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej $y = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

9. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x) = \arctg \sqrt{x}$ na przedziale $[1, 3]$.

10. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \cos x dx.$$