**Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych**

**1.** Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji

a) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{y^2-2}}$ b) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ c) $f(x,y)=\ln(6-x)$

d) $f(x,y)=\sqrt{y\sin x}$ e) $f(x,y)=\ln(4-\sqrt{x+y})$ f) $f(x,y)=\arcsin\sqrt{y-\sqrt{x}}$.

**2.** Obliczyć granice lub wykazać, że nie istnieją

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,2)}\dfrac{x+2}{xy^2+2y^2-xy-2y}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(x^3y)}{5y}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(2+\cos(x+y))^{\frac{y}{x}}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(1-x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arcsin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

**3.** Zbadać ciągłość następujących funkcji na $\mathbb{R}^2$

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3-yx^3}{x^4+y^4} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{|x|+|y|} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

**4.** Zbadać istnienie granic

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad \lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) \quad \text{i} \quad \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right).$$