Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

1. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji lub wykazać, że pochodne te nie istnieją:

   a) $f(x,y,z) = x^2 \sin(xy) + 3xyz - 4x^2 z^4 + \mathrm{e}$ dla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

   b) $f(x,y) = \log_2(x^2 + \sqrt{3}y^2)$ dla $(x,y) \neq (0,0)$

   c) $f(x,y) = 3x^{2y+1}$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. Sprawdzić, czy funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{jeżeli } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{jeżeli } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) jest ciągła w punkcie $(0,0)$

   b) ma pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$

   c) ma pochodne kierunkowe w punkcie $(0,0)$ w kierunku dowolnego wersora.

3. Zbadać różniczkowalność następujących funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

   a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. Wykazać, że powierzchnia o równaniu $z = y(1-xy)$ posiada płaszczyznę styczną w każdym swoim punkcie. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2,1,-1)$.

5. Wyznaczyc równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = x^y$ w punkcie $(2,3,8)$.

6. Korzystając z definicji obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = 2|x| + |y|$ w punkcie $(x_0,y_0) = (0,0)$ w kierunku wektora $\vec{v} = [1,-1]$.

7. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sin(x^2+y) + 2xy$ w punkcie $(0,\pi/2)$ w kierunku $\vec{v} = [-1,2]$.

8. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x+yz}$ w punkcie $(0,1,1)$ w kierunku wektora $\vec{v} = [1,-2,2]$.

9. Niech $f(x,y) = 2xy^3$ oraz $(x_0,y_0) = (1,-2)$. W kierunku którego wersora $\vec{v}$, wzrost funkcji f w punkcie (x_0,y_0) jest najszybszy?

10. Obliczyć

a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ dla funkcji $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 y^3}{z}$

b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ dla funkcji $f(x,y) = \sin(xy)$.

11. Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji

a) $f(x,y) = 3x^2y - 15y - 12x + y^3$

b) $f(x,y) = x^4 + 6y^2 - 4xy^3 - 1$

c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

12. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji

a) $f(x,y) = x^2y(2-x-y)$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6\}$

b) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ x \geq 0\}$.

13. Wyznaczyć podane pochodne (podać niezbędne założenia):

a) g' jeśli $g(x) = f(x, y(x))$, $f(x,y) = x^2 + 3xy\sin(xy)$

b) $\frac{\partial h}{\partial r}$ oraz $\frac{\partial h}{\partial \varphi}$ jeśli $h(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

14. Przekształcić wyrażenie różniczkowe wprowadzając zmienne niezależne u i v:

a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ gdy $u = x$ i $v = \dfrac{y}{x}$

15. Niech $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$. Wyrazić wyrażenie różniczkowe

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}$$

za pomocą zmiennych niezależnych r i φ.