Ciągi liczbowe

1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+9^{n+1}}{5^n+3^{2n-1}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}+1)^{22}}{(\sqrt[5]{n}+2)^{55}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4n^2-5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n+(-3)^n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n^2+n}\rfloor}{n}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2+n+100)}{\ln(n^{100}+999n-1)}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{(n^2+2)^{n+3}}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{4}{n^4}}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n+1}+\sin n}$ m) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin n!}{n^2+\cos n^3}$ n) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

o) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\ldots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$ p) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

2. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągów:

a) $a_n=\frac{2^n}{n!}$ b) $a_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{2}{(n+1)!}$ c) $a_n=\frac{2}{3+1}+\frac{2^2}{3^2+2}+\ldots+\frac{2^n}{3^n+n}$.

3. Obliczyć:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{1+n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+4}{n^3+2}\right)^{2n^3}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-7}{n^2+2}\right)^{n^2+5}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+3}{3^n}\right)^{4^n+2}$.

4. Obliczyć granice ciągów lub uzasadnić, że nie istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+\ldots+2n-1}{\sqrt{n^4-n^3+\sqrt{n}}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{4n+1}\right)^{n^2}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(0,999999+\frac{1}{n}\right)^n$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1,000001+\frac{1}{n}\right)^n$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}[3+(-1)^n]^n$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right)$.