Granica i ciągłość funkcji, asymptoty

1. Obliczyć granice (jeśli istnieją):

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x+\operatorname{tg} x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\sin 3x}$ **i)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ **k)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x}$ **l)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^5-5}{x-e}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$ **n)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ **o)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

p) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{-5x}{4-x^2}}$ **q)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-3x}{4+5x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}$ **r)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)^{x}$.

2. Wykazać, że nie istnieją granice:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x}\sin x$ **b)** $\lim\limits_{x\to 9}\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

3. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}$.

4. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2+x}$ **b)** $f(x)=x-\operatorname{arctg} 2x$ **c)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+4x+1}{x} & \text{dla } x<0\\[2mm] \dfrac{2x-2}{x-1} & \text{dla } x>1.\end{cases}$

5. Zbadać ciągłość funkcji:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x^2}} & \text{dla } x\neq 0\\ -1 & \text{dla } x=0.\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}\frac{3^{\frac{1}{x-2}}-1}{3^{\frac{1}{x-2}}+1} & \text{dla } x\neq 2\\ 1 & \text{dla } x=2.\end{cases}$

6. Dobrać wartości parametrów a i b tak, aby funkcja dana poniższym wzorem była ciągła na $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-x}{x} & \text{dla } x<0\\ a & \text{dla } x=0\\ b+\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}} & \text{dla } x>0.\end{cases}$$

Definicja 1. Posta o równaniu $y = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$ nazywa się

- *asymptotą poziomą lewostronną* wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - b) = 0,$$

- *asymptotą poziomą prawostronną* wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - b) = 0.$$

Definicja 2. Posta o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$ nazywa się

- *asymptotą ukośną lewostronną* wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0,$$

- *asymptotą ukośną prawostronną* wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Definicja 3. Posta o równaniu $x = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ nazywa się

- *asymptotą pionową lewostronną* wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty,$$

- *asymptotą pionową prawostronną* wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty.$$

Uwaga. Asymptotę, która jest jednocześnie lewo- i prawostronna nazywamy asymptotą obustronną.

Uwaga. Można wykazać, że prosta o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{i} \qquad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax).$$

Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla asymptoty prawostronnej.