Pochodne funkcji jednej zmiennej

1. Zbadać, czy poniższe funkcje są różniczkowalne w punkcie $x_0 = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{|x|} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$

2. Obliczyć pochodne funkcji

a) $f(x) = (2x^2 + \operatorname{tg} x)(7 - 4\sqrt{x} + 3x^5)$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$ c) $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

d) $f(x) = 1 - 2\operatorname{ctg}(x^3 + 2x^2)$ e) $f(x) = \sin^5 \dfrac{2^x + 1}{3^x + 1}$ f) $f(x) = x^{3\sin x + 1}$

g) $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^x})$ h) $f(x) = \log_2(3\operatorname{tg} x - x^2)$ i) $f(x) = \dfrac{\arcsin x^3}{e^{2x}}$

j) $f(x) = (\operatorname{arctg} 3x - \ln\sqrt{x^2 + 4})^{2019}$ k) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ l) $f(x) = \sin x^{\cos x}$

m) $f(x) = (\arccos 2x)^{x^2}$ n) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} + \cos\sqrt{5x}$ o) $f(x) = \cosh(\ln x)$.

3. Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji w punkcie P_0:

a) $f(x) = x^x, \quad P_0 = (3, f(3))$ **b)** $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2 - x}{2 + x} \quad P_0 = (2, f(2))$.

4. Obliczyć kąt, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \mathrm{e}^{-0.5x}$ i $g(x) = e^{\sqrt{3}x}$.

5. Wykazać, że krzywe o równaniach $y = 5x^2 + 2x - 3$ i $y = x^3 + 10x - 7$ są styczne w punkcie $P(2, 21)$.

Uwaga: Mówimy, że krzywe o równaniach $y = f(x)$ i $y = g(x)$ są styczne, jeżeli mają tę samą styczną w ich wspólnym punkcie.

6. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{1 - \cos(x\sqrt{2})}$ w punkcie $(0, f(0))$ lub wykazać, że taka styczna nie istnieje.

7. Obliczyć pochodną funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Czy f' jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$?

8. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sin^2\sqrt{|x|}$ wszędzie tam, gdzie ona istnieje.

9. Znaleźć parametry a i b, dla których poniższa funkcja jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2x} + b & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 3 - x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$