Zastosowania pochodnej

1. Uzasadnić, że podane równania mają dokładnie jedno rozwiązanie we wskazanych przedziałach:

a) $3^x + x = 3, \quad (0,1)$ **b)** $x^{100} + x - 1 = 0, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right).$

2. Korzystając z twierdzenia Rolle'a, wykazać, że liczba 0 jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania $3^x + \operatorname{sh} x - x - 1 = 0$.

3. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić nierówności:

a) $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|, \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x, \quad \text{dla } x > -1.$

4. Udowodnić, że

a) $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \text{dla } x \in [0, \infty)$

b) $\ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}, \quad \text{dla } x \in (0, \infty).$

5. Korzystając z twierdzenia Taylora udowodnić nierówności:

a) $e^{-2x} \geqslant 1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4x^3}{3}, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$

b) $\ln(x+1) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3, \quad \text{dla } x > -1$

c) $\operatorname{ch} x \geqslant 1 + \dfrac{1}{2}x^2, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$