

## Całki powierzchniowe niezorientowane

1. Obliczyć wartość średnią funkcji  $F(x, y, z) = z^2$  na części stożka  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  odciętej płaszczyznami  $z = 1$  i  $z = 3$ .
2. Obliczyć moment bezwładności względem osi  $Oz$  płata opisanego równaniem  $2z = x^2 + y^2$ , gdzie  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  i  $x \leq 0$ , jeżeli gęstość powierzchniowa dana jest wzorem  $\mu(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 4z^2}}$ .
3. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego płata  $x + y + z = 4$ , gdzie  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
4. Obliczyć całkę

$$\iint_S |y| dS,$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią paraboloidy  $y = -x^2 - z^2$  zamkniętej płaszczyzną  $y = -1$ .

5. Obliczyć masę półsfery :  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$  o gęstości powierzchniowej  $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2$ .
6. \*Obliczyć całkę powierzchniową

$$\iint_S xy dS,$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią o parametryzacji

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, uv) \quad \text{dla} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

**Twierdzenie (o zamianie całki powierzchniowej niezorientowanej na podwójną)**

Jeśli funkcja  $F(x, y, z)$  jest ciągła na gładkim płacie powierzchniowym  $S : z = f(x, y)$ , to

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy,$$

gdzie  $D$  jest rzutem  $S$  na płaszczyznę  $Oxy$ .

**Zastosowania:**

- 1) pole płata  $S$ :  $|S| = \iint_S dS$ ;
- 2) masa płata  $S$  o gęstości powierzchniowej  $\mu(x, y, z)$ :  $m = \iint_S \mu(x, y, z) dS$ ;
- 3) całkowity ładunek elektryczny płata  $S$  o gęstości powierzchniowej  $q(x, y, z)$ :  $Q = \iint_S q(x, y, z) dS$ ;
- 4) współrzędne środka ciężkości płata  $S$  o gęstości powierzchniowej  $\mu(x, y, z)$ :  
 $x_c = \frac{1}{m} \iint_S \mu(x, y, z) x dS, \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_S \mu(x, y, z) y dS, \quad z_c = \frac{1}{m} \iint_S \mu(x, y, z) z dS$ ;
- 5) moment bezwładności płata  $S$  o gęstości powierzchniowej  $\mu(x, y, z)$   
 - względem punktu  $(0, 0, 0)$ :  $I_{(0,0,0)} = \iint_S \mu(x, y, z) (x^2 + y^2 + z^2) dS$ ,  
 - względem osi  $Oz$ :  $I_Z = \iint_S \mu(x, y, z) (x^2 + y^2) dS$ ,  
 - względem płaszczyzny  $Oxy$ :  $I_{XY} = \iint_S \mu(x, y, z) z^2 dS$ ,
- 6) wartość średnia funkcji  $F$  na płacie  $S$ :  $F_{sr} = \frac{\iint_S F dS}{|S|}$