Twierdzenie Stokesa, twierdzenie Gaussa-Greena-Ostrogradskiego

1. Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{F}(x, y, z) = [\exp(zy) - 2x, \cos(zx) + 2y, 2z]$ przez płat zamknięty S zorientowany na zewnątrz, utworzony ze stożka $z^2 = x^2 + y^2$ odciętego płaszczyznami $z = 1$ i $z = 4$.

2. Korzystając z twierdzenia Stokesa obliczyć całki krzywoliniowe:

a)

$$\oint_{\Gamma} (y^2 + z^2)\, dx + (z^2 + x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz,$$

gdzie Γ jest łukiem zamkniętym powstałym z przecięcia walca $x^2 + y^2 = 2x$ i płaszczyzny $x + z = 4$, zorientowanym w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara.

b)

$$\oint_{\Gamma} (x^2 + y)\, dx + (y^3 - 2z)\, dy + (3x + z^4)\, dz,$$

gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$, zorientowanym w kolejności $ABCA$.
Sprawdzić otrzymany wynik obliczając całkę bezpośrednio.

3. Korzystając z twierdzenia GGO obliczyć całkę

$$\oiint_{S} (x + e^{-3y})\, dydz + (x \cos y + z)\, dxdy,$$

gdzie S jest płatem zamkniętym zorientowanym na zewnątrz, utworzonym z powierzchni: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ i $y + z = 3$.

4. Obliczyć cyrkulację pola wektorowego $\vec{F} = [y, -z, x]$ wzdłuż krzywej będącej brzegiem powierzchni $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = 5 - x^2 - y^2 \wedge z \geqslant 1\}$ skierowanej zgodnie z ruchem wskazówek zegara patrząc od dodatniego kierunku osi Oz.

5. Obliczyć strumień pola $\vec{F} = [y, -2x, -z]$ przez półsferę $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ zorientowaną na zewnątrz.

6. Obliczyć całkę

$$\iint_{S} x^2 y^2 z\, dxdy$$

po górnej stronie dolnej połowy sfery: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

7. Obliczyć całkę

$$\iint_{S} xz\, dydz - yz\, dzdx + y\, dxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną elipsoidy $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

8. Korzystając z twierdzenia GGO obliczyć strumień pola $\vec{W} = [2x^2 y, 3x^2 + y, -5xz]$ przez wewnętrzną stronę brzegu bryły $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [-1, 1], 0 \leqslant z \leqslant 4 - y^2\}$. Sprawdzić wynik obliczając odpowiednią całkę bezpośrednio.