Szeregi liczbowe

1. Zbadać zbieżność szeregów na podstawie definicji, obliczyć sumy zbieżnych

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{5^n} \qquad \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!} \qquad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

2. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n!} \qquad \text{b) } \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-3}} \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n}+\frac{3}{n^2}\right) \qquad \text{d) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n^5-n}}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+3}{4n^3-3} \qquad \text{f) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n} \qquad \text{g) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \qquad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg} n$$

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{j) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2+\sin n!}{n^4-1} \qquad \text{k) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^n$$

$$\text{m) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\ln^2 n} \qquad \text{n) } \sum_{n=2}^{\infty}n^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n} \qquad \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{6^n} \qquad \text{p) } \sum_{n=1}^{\infty}6^n\arcsin\frac{\pi}{6^n}$$

$$\text{q) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \qquad \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2n-1)!}{n^{2n}} \qquad \text{s) } \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} \qquad \text{t) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+2n+5}.$$

3. Korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregów udowodnić:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{4^n}=0 \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{n^n}=\infty.$$

4. Zbadać zbieżność szeregów. Określić typ zbieżności szeregów zbieżnych:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n+4}} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}(-1)^n$$

$$\text{d) } \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} \qquad \text{e) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^n} \qquad \text{f) } \sum_{n=2}^{\infty}\arcsin\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{(-1)^n}{n^2\sqrt{n}} \qquad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

5. Zbadać zbieżność szeregów zespolonych. Określić typ zbieżności szeregów zbieżnych:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}(1-i)^n \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n} \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(in)^n}{n!} \qquad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n^2} \qquad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-2i} \qquad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}.$$