Szeregi funkcyjne

1. Podać zbiory zbieżności i sumy szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^{n-1} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}.$$

2. Wyznaczyć zbiory zbieżności szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}, \quad x \neq 0 \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}, \quad x \neq -1 \qquad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{3^n} \qquad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (2-x^2)^n x$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \quad x \neq \pm 1 \qquad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}, \ x \neq -1$$

3. Zbadać jednostajną zbieżność szeregów na podanych zbiorach $\mathbf{X}$

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3 nx}{n\sqrt[3]{n}}, \ \mathbf{X} = \mathbb{R} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{1+n^2}, \ \mathbf{X} = \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin 5nx}{\sqrt{n+\sqrt{n^5}}}, \ \mathbf{X} = \mathbb{R} \qquad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{n} \sin \frac{x}{n}, \ \mathbf{X} = [0,3]$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}\sqrt{1+2nx}}, \quad \mathbf{X} = [0,\infty) \qquad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \sin \frac{2x}{n}, \quad \mathbf{X} = [a,\infty) \quad a > 1$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \, \mathrm{e}^{-n^2 x}, \mathbf{X} = [0,\infty).$$

4. Wykazać, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n4^n}$ jest różniczkowalna w $\mathbb{R}$ i obliczyć $f'(\frac{\pi}{2})$.

5. Obliczyć

$$\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \right) dx,$$

a następnie wykazać, że obliczona całka jest dodatnia i mniejsza od $\frac{1}{2}$.

6. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$. Obliczyć $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

7. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}$. Wykazać, że f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i obliczyć $\int_0^{\infty} f(x)dx$.