Szeregi potęgowe

1. Wyznaczyć zbiory punktów zbieżności następujących szeregów:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3n^2+1} x^n \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{(n^2+3)4^n} \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}.$$

2. Wyznaczyć zbiory punktów zbieżności oraz sumy następujących szeregów:

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ obliczyć } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n}$$

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1} \qquad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} n(2n+1)x^{2n}, \text{ obliczyć } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{9^n}.$$

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje i podać promienie zbieżności uzyskanych szeregów:

a) $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$, obliczyć $f^{(19)}(0)$

c) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, obliczyć $f^{(100)}(0)$ i $f^{(101)}(0)$

d) $f(x) = \cos x \cos 5x$

e) $f(x) = \cosh x^2$, obliczyć $f^{(100)}(0)$ i $f^{(101)}(0)$ i $f^{(102)}(0)$

f) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

g) $f(x) = \cos^2 x$, obliczyć $f^{(100)}(0)$ i $f^{(101)}(0)$ i $f^{(102)}(0)$

h) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$

i) $f(x) = \ln(3+x^2)$

j) $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

k) $f(x) = \dfrac{x^3}{(4+x^2)^2}$

l) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x^2$.

4. Rozwinąć podane funkcje w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_0. Podać promień zbieżności uzyskanego szeregu. Obliczyć $f^{(70)}(x_0)$ i $f^{(71)}(x_0)$.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3-2x}, \quad x_0 = -1$

b) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

c) $f(x) = \operatorname{arctg}(1-x), \quad x_0 = 1$

d) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 3$

e) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1} \quad x_0 = 2.$

5. Metodą rozwinięcia w szereg potęgowy obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{-x}}{x}dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ c) $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}dt$ d) $\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt.$

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x}\,dx$ z błędem mniejszym od 0,001.