

Szeregi Fouriera

1. Rozwinąć w szereg Fouriera w $[-\pi, \pi]$ funkcję $f(x)$, gdy

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ x & \text{dla } x \in [0, \pi). \end{cases}$

2. Rozwinąć w szereg Fouriera w $[-\pi, \pi]$ funkcję $f(x) = \cos^2 x + \sin 3x$.

3. Rozwinąć w szereg Fouriera a) sinusów, b) kosinusów funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 2 - x & \text{dla } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

4. Rozwinąć w szereg Fouriera kosinusów w $[0, \pi]$ funkcję

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \sin^2 x$.

Korzystając z rozwinięcia w punkcie a), obliczyć sumy szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

5. Rozwinąć w szereg Fouriera w $[-\pi, \pi]$ funkcję $f(x) = x^2$. Znaleźć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Rozwinąć w szereg Fouriera sinusów $[0, 2\pi]$ funkcję $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$.

7. Rozwinąć w szereg Fouriera w $[-\pi, \pi]$ funkcję $f(x) = \cos ax$ ($a \notin \mathbb{Z}$).

8. Rozwinąć w szereg Fouriera w $[-\pi, \pi]$ funkcję $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$.

9. Podać wzory na a_0 , a_n , b_n rozwinięcia w szereg Fouriera w $[-4, 4]$ funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-4, -2) \\ x + 2 & \text{dla } x \in [-2, 0) \\ 1 & \text{dla } x = 0 \vee x = 4 \\ 0 & \text{dla } x \in (0, 2) \\ (x - 2)(x - 4) & \text{dla } x \in (2, 4). \end{cases}$$

Jakie są wartości szeregu Fouriera w punktach: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$?