

Całka Fouriera, iloczyn skalarny funkcji

1. Przedstawić funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

za pomocą **a)** kosinusowej całki Fouriera **b)** sinusowej całki Fouriera.

2. Niech $f(x) = \frac{1}{2}[\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn}(x - x_0)]$, $x_0 > 0$. Narysować wykres f i przedstawić ją za pomocą całki Fouriera.

3. Przedstawić w postaci **a)** sinusowej **b)** kosinusowej całki Fouriera funkcję $f(x) = e^{ax}$, $a > 0$ w $(-\infty, 0)$.

4. Napisać wzór całkowy Fouriera dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Sprawdzić, czy funkcje f i g są ortogonalne:

a) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$ na $[-1, 1]$

b) $f(x) = \sin 2x$ i $g(x) = e^x - 1$ na $[0, 2\pi]$

6. Uzasadnić, że ciąg

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots$$

jest ortogonalny w $[-\pi, \pi]$.